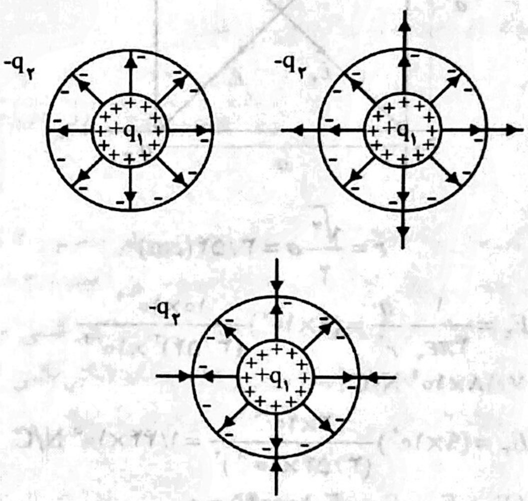
فصل ۱۸

میدان‌های الکتریکی

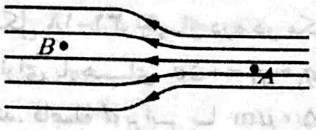
بخش ۱۸-۳ خط‌های میدان الکتریکی

۱- خط‌های میدان الکتریکی را هم در میان دو پوستهٔ کروی رسانای هم مرکز و هم در بیرون آنها هنگامی که بار مثبت یکنواخت q_1 روی پوستهٔ داخلی و بار منفی یکنواخت $-q_2$ روی پوستهٔ خارجی قرار دارد، به طور کیفی رسم کنید. حالت‌های $q_1 > q_2$ ، $q_1 = q_2$ ، $q_1 < q_2$ را در نظر بگیرید.

حل:



۲- در شکل ۱۸-۲۹، فاصلهٔ خط‌های میدان الکتریکی در سمت چپ، دو برابر فاصلهٔ آنها در سمت راست است. (الف) اگر بزرگی میدان در نقطهٔ A برابر ۴۰ N/C باشد، بزرگی نیروی وارد بر یک پروتون در نقطهٔ A چقدر است؟ (ب) بزرگی میدان در نقطهٔ B چقدر است؟



شکل ۱۸-۲۹ مسئلهٔ ۲

حل: (الف)

$$F = qE = eE = (1/6 \times 10^{-19})(40) = 6/4 \times 10^{-18}\ \text{N}$$

جهت نیرو به سمت چپ است.

(ب) می‌دانیم که بزرگی میدان متناسب با تعداد خطوط نیروی میدان است. بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$E_A = 2E_B \Rightarrow E_B = \frac{E_A}{2} = \frac{40}{2} = 20\ \text{N/C}$$

بخش ۱۸-۴ میدان ناشی از یک بار نقطه‌ای

●۳- SSM هستهٔ اتم پلوتونیم -۲۳۹ شامل ۹۴ پروتون است. فرض کنید این هسته، کره‌ای به شعاع ۶/۶۴fm است و بار پروتون‌ها به طور یکنواخت در این کره پخش شده‌اند. در سطح هسته، (الف) بزرگی و (ب) جهت (به طور شعاعی، رو به داخل یا رو به خارج) میدان الکتریکی ناشی از پروتون‌ها چگونه است؟

حل: (الف)

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ze}{r^2}=(9\times10^9)\frac{(94)(1.6\times10^{-19})}{(6.64\times10^{-15})^2}$$

$$E=3.07\times10^{21}\ \text{N/C}$$

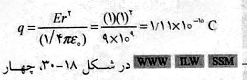
(ب) میدان شعاعی و به سمت خارج از هسته است.

●۴- دو ذره روی محور x قرار دارند: ذرهٔ ۱ با بار -2.00×10^{-7} C در $x=6.00$cm و ذرهٔ ۲ با بار $+2.00\times10^{-7}$ C در $x=21.0$cm . میدان الکتریکی خالص آنها در وسط ذره‌ها، برحسب نمادگذاری بردار یکه چگونه است؟

حل:
$$x=\frac{x_2-x_1}{2}=\frac{21-6}{2}=7.5\ \text{cm}$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}=(9\times10^9)\frac{2\times10^{-7}}{(7.5\times10^{-2})^2}=3.2\times10^5\ \text{N/C}$$

$$\vec{E}_{total}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=2\vec{E}_1=-6.4\times10^5\ \hat{i}\text{N/C}$$



●۵- SSM بزرگی یک بار نقطه‌ای را که میدان الکتریکی ناشی از آن در فاصلهٔ ۵۰cm از آن برابر ۲/۰N/C است، پیدا کنید.

حل:

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\ \Rightarrow\ q=\frac{Er^2}{(1/4\pi\varepsilon_0)}=\frac{(2)(0.5)^2}{9\times10^9}$$

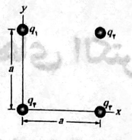
$$q=5.56\times10^{-11}\ \text{C}$$

●۶- بزرگی یک بار نقطه‌ای که میدان الکتریکی ۱/۰۰N/C در نقطه‌هایی به فاصلهٔ ۱/۰۰m از آن ایجاد می‌کند، چقدر است؟

حل:

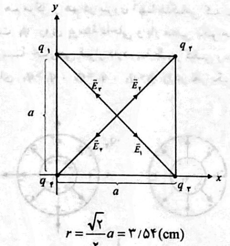
$$q=\frac{Er^2}{(1/4\pi\varepsilon_0)}=\frac{(1)(1)^2}{9\times10^9}=1.11\times10^{-10}\ \text{C}$$

●●۷- SSM ILW WWW در شکل ۱۸-۳۰، چهار ذره با بارهای $q_1=+10.0$nC ، $q_2=-20.0$nC ، $q_3=+20.0$nC ، و $q_4=-10.0$nC تشکیل مربعی به ضلع $a=5.00$cm را داده‌اند. میدان الکتریکی خالصی که این چهار ذره در مرکز مربع ایجاد می‌کنند، برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، چگونه است؟



شکل ۱۸-۳۰ مسئلهٔ ۷

حل:



$$r=\frac{\sqrt{2}}{2}a=3.54(\text{cm})$$

$$E_1=E_4=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}=(9\times10^9)\frac{10\times10^{-9}}{(3.54)^2\times10^{-4}}=7.18\times10^4\ \text{N/C}$$

$$E_2=E_3=(9\times10^9)\frac{2\times10^{-9}}{(3.54\times10^{-2})^2}=1.44\times10^5\ \text{N/C}$$

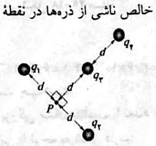
$$E_x=(E_1+E_2-E_3-E_4)\cos45=0$$

$$E_y=(E_2+E_3-E_1-E_4)\sin45=2(E_2-E_1)\sin45$$

$$=2(1.44\times10^5-7.18\times10^4)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1.02\times10^5\ \text{N/C}$$

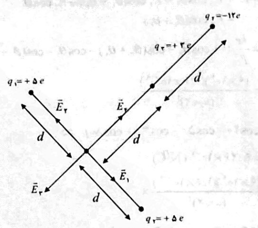
$$\vec{E}=10.2\times10^5\ \hat{j}\ \text{N/C}$$

●●۸- GO در شکل ۱۸-۳۱، چهار ذره در مکان‌هایی ثابت شده‌اند و دارای بارهای $q_1=q_2=+5e$ ، $q_3=+3e$ و $q_4=-12e$ هستند. فاصلهٔ d برابر با ۵/۰μm است. بزرگی میدان الکتریکی خالص ناشی از ذره‌ها در نقطهٔ P چقدر است؟



شکل ۱۸-۳۱ مسئلهٔ ۸

حل:



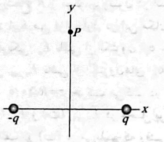
$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\vec{E}_4$$

$\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ اثر همدیگر را خنثی می‌کنند.

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3e}{d^2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{12e}{4d^2}=0$$

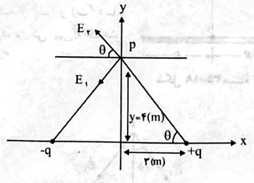
$$\vec{E}=0$$

●●۹- شکل ۱۸-۳۲، دو ذرهٔ باردار را روی محور x نشان می‌دهد $-q=-3.20\times10^{-19}$C در $x=-3.00$m و $q=3.20\times10^{-19}$C در $x=+3.00$m. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی ایجاد شده در نقطهٔ P واقع بر $y=4.00$m چگونه است؟



شکل ۱۸-۳۲ مسئلهٔ ۹

حل:



$$\tan\theta=\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ \theta=53^\circ$$

$$r^2=x^2+y^2$$

$$E_1=E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}=(9\times10^9)\frac{3.2\times10^{-19}}{(9+16)}=$$

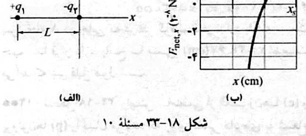
1.15×10^{-10} N/C

$$E_y=E_{2y}-E_{1y}=0$$

$$E_x=2E_1\cos\theta=(2)(1.15\times10^{-10})(\cos53)=1.38\times10^{-10}\ \text{N/C}$$

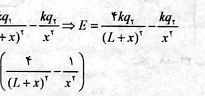
$$\vec{E}=-1.38\times10^{-10}\ \hat{i}\ \text{N/C}$$

●●۱۰- شکل ۱۸-۳۳ الف، دو ذرهٔ باردار را نشان می‌دهد که در مکان‌هایی روی محور x به فاصلهٔ L ثابت شده‌اند. نسبت q_1/q_2 بزرگی‌های بار آنها برابر با ۴/۰۰ است. شکل ۱۸-۳۳ ب، $E_{net,x}$، مؤلفهٔ x میدان الکتریکی آنها را در امتداد محور x برای سمت راست ذرهٔ ۲ نشان می‌دهد. مقیاس محور x با $x_s=30.0$cm مشخص شده است. (الف) به ازای چه مقدار $x>0$ ، $E_{net,x}$ بیشینه است؟ (ب) اگر بار ذرهٔ ۲ برابر با $-q_2=-3e$ باشد، مقدار آن بیشینه چقدر است؟



شکل ۱۸-۳۳ مسئلهٔ ۱۰

حل:



(الف)
$$E=\frac{kq_1}{(L+x)^2}-\frac{kq_2}{x^2}\Rightarrow E=\frac{4kq_2}{(L+x)^2}-\frac{kq_2}{x^2}$$

$$E=kq_2\left(\frac{4}{(L+x)^2}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{dE}{dx}=kq_2\left(\frac{-8}{(L+x)^3}-\frac{2}{x^3}\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\frac{-8x^3+2(L+x)^3}{x^3(L+x)^3}=0\ \Rightarrow L+x=(4)^{1/3}x\Rightarrow$$

$$x=\frac{L}{(4)^{1/3}-1}\ \Rightarrow\ x=\frac{L}{0.59}$$

$$x=20\,cm\ \Rightarrow\ E=0\Rightarrow\frac{4}{(L+0.2)^2}-\frac{1}{(0.2)^2}=0\ \Rightarrow$$

$$\frac{2}{L+0.2}=\pm\frac{1}{0.2}\Rightarrow L=0.2\text{m}\Rightarrow x=\frac{0.2}{0.59}\Rightarrow x=0.34\text{m}$$

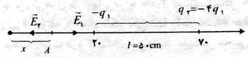
(ب)

$$E=(۹\times۱۰^{۹})(۳\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹})\left[\frac{۴}{(۰/۲+۰/۳۴)^{۲}}-\frac{۱}{(۰/۳۴)^{۲}}\right]$$

$E=۲/۹\times۱۰^{-۸}$ N/C

●●۱۱- SSM دو ذره روی محور x قرار دارند: ذرهٔ ۱ با بار $q_{۱}=۲/۱\times۱۰^{-۸}$C در $x=۲۰$cm و ذرهٔ ۲ با بار $q_{۲}=-۴/۰۰q_{۱}$ در $x=۷۰$cm. در چه مختصه‌ای روی محور x، میدان الکتریکی خالص دو ذره برابر صفر است؟

حل:



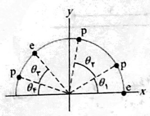
$$E_{۱}=E_{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\frac{q_{۱}}{(۲۰-x^{۲})\times۱۰^{-۴}}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\frac{۴q_{۱}}{(۷۰-x)^{۲}\times۱۰^{-۴}}\Rightarrow$$

$$\frac{۱}{(۲۰-x)^{۲}}=\frac{۴}{(۷۰-x)^{۲}}\Rightarrow\frac{۱}{۲۰-x}=\pm\frac{۲}{۷۰-x}\Rightarrow$$

$۴۰-۲x=۷۰-x\ \Rightarrow\ x=-۳۰$cm

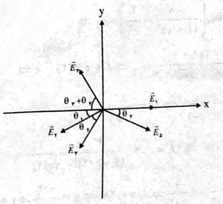
پس نقطه A در جایی که درنظر گرفتیم قرار ندارد بلکه سمت چپ مبدأ قرار دارد. پاسخ با منفی $x=۳۶/۶۷$(cm) بدست می‌آید که غیر قابل قبول است.

●●۱۲- شکل ۱۸-۳۴ آرایش نامنظمی از الکترون‌ها (e) و پروتون‌ها (p) را نشان می‌دهد که روی کمانی دایره‌ای به شعاع $r=۲/۰۰$cm با زاویه‌های $\theta_{۱}=۳۰/۰^{\circ}$، $\theta_{۲}=۵۰/۰^{\circ}$، $\theta_{۳}=۳۰/۰^{\circ}$، و $\theta_{۴}=۲۰/۰^{\circ}$ قرار گرفته‌اند. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محورx) میدان الکتریکی خالص ایجاد شده در مرکز کمان چیست؟



شکل ۱۸-۳۴ مسئلهٔ ۱۲

حل:



$$E_{x}=E_{۱}+E_{۵}\cos\theta_{۴}-E_{۴}\cos(\theta_{۳}+\theta_{۴})-E_{۲}\cos\theta_{۱}$$
$$-E_{۳}\cos(\theta_{۱}+\theta_{۲})$$

$$E_{x}=\frac{ke}{R^{۲}}(۱+\cos\theta_{۴}-\cos(\theta_{۳}+\theta_{۴})-\cos\theta_{۱}-\cos(\theta_{۱}+\theta_{۲})$$

$$E_{x}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۰/۰۲)^{۲}}$$

$$(۱+\cos۲۰-\cos۵۰-\cos۳۰-\cos۸۰)\ \Rightarrow$$

$E_{x}=۹/۲۶\times۱۰^{-۷}$ (N/C)

$$E_{y}\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۰/۰۲)^{۲}}\times$$

$$(-\sin۲۰-\sin۸۰-\sin۳۰+\sin۵۰)\Rightarrow$$

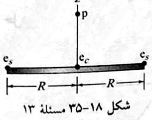
$E_{y}=-۳/۸۲\times۱۰^{-۶}$ (N/C)

$$E=\sqrt{Ex^{۲}+Ey^{۲}}=\sqrt{(۹/۲۶\times۱۰^{-۷})^{۲}+(-۳/۸۲\times۱۰^{-۶})^{۲}}$$
$$=۳/۹۳\times۱۰^{-۶}\ (N/C)$$

$$\tan\theta=\frac{Ey}{Ex}=\frac{-۳/۸۲\times۱۰^{-۶}}{۹/۲۶\times۱۰^{-۷}}=-۴/۱۳\Rightarrow\theta=-۷۶/۳۷^{\circ}$$

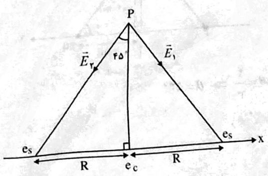
زاویه θ نسبت به محور x بدست می‌آید.

●●۱۳- شکل ۱۸-۳۵، یک پروتون (p) را روی محور مرکزی یک قرص با چگالی بار یکنواخت ناشی از الکترون‌های اضافی نشان می‌دهد. سه تا از این الکترون‌ها نشان داده شده‌اند: الکترون e_{c} در مرکز قرص و الکترون‌های e_{s} در دو سوی مخالف قرص به شعاع R از مرکز. پروتون در ابتدا در فاصلهٔ $z=R=۲/۰۰$cm از قرص قرار دارد. در این مکان، بزرگی‌های (الف) میدان الکتریکی $\vec{E}_{c}$ ناشی از الکترون e_{c}، و (ب) میدان الکتریکی *خالص* $\vec{E}_{s,net}$ ناشی از الکترون‌های e_{s} چقدر است؟ سپس پروتون به $z=R/۱۰/۰$ حرکت می‌کند. در این صورت بزرگی‌های (پ) $\vec{E}_{c}$ و (ت) $\vec{E}_{s,net}$ در محل پروتون چقدر است؟ (ث) از (الف) و (پ) در می‌یابیم که وقتی پروتون به قرص نزدیکتر شود، بزرگی $\vec{E}_{c}$ افزایش می‌یابد. چرا آن طور که از (ب) و (ت) دیده می‌شود، بزرگی $\vec{E}_{s,net}$ کاهش می‌یابد؟



شکل ۱۸-۳۵ مسئلهٔ ۱۳

حل:



(الف)
$$E_{c}=\frac{ke_{c}}{R^{۲}}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۰/۰۲)^{۲}}$$
$$=۳/۶\times۱۰^{-۶}\ N/C$$

(ب)
$$r^{۲}=R^{۲}+R^{۲}=۲R^{۲}$$

$$E_{۱}=E_{۲}=\frac{ke_{s}}{r^{۲}}\Rightarrow E_{s,net}=۲E_{۱}\cos\theta=\frac{۲ke_{s}}{۲R^{۲}}\cos\theta\Rightarrow$$

$$E_{s,net}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۰/۰۲)^{۲}}\times\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=۲/۵۵\times۱۰^{-۶}\ N/C$$

(پ)
$$r=۰/۱R=۰/۰۰۲m$$

$$E_{c}=\frac{(۹\times۱۰^{۹})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۰/۰۰۲)^{۲}}=۳/۶\times۱۰^{-۴}\ N/C$$

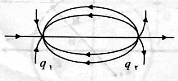
(ت)
$$r^{۲}=R^{۲}+۰/۰۱R^{۲}\Rightarrow r=\sqrt{۱/۰۱R^{۲}}=۰/۰۲۰۱m$$

$$E_{s,net}=۲E_{۱}\cos\theta=\frac{۲ke_{s}}{r^{۲}}\cos\theta=\frac{۲ke_{s}}{r^{۲}}\left(\frac{۰/۱R}{r}\right)\Rightarrow$$

$$E_{s,net}=(۲\times۹\times۱۰^{۹})\frac{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}{(۰/۰۲۱)^{۲}}\times\left(\frac{۰/۰۰۲}{۰/۰۲۰۱}\right)$$
$$=۶/۲۲\times۱۰^{-۷}\ N/C$$

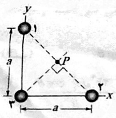
(ث) هرچه نقطه P به سطح قرص نزدیکتر می‌شود θ بزرگتر شده و $\cos\theta$ بسیار کوچکتر می‌گردد. بنابراین وقتی پروتون به قرص نزدیکتر می‌شود $E_{s,net}$ کاهش می‌یابد.

●●۱۴- در شکل ۱۸-۳۶، ذرهٔ ۱ با بار $q_{۱}=-۵/۰۰q$ و ذرهٔ ۲ با بار $q_{۲}=+۲/۰۰q$ روی محور x قرار دارند. (الف) برحسب مضربی از فاصلهٔ L، در چه مختصه‌ای روی محور x، میدان الکتریکی خالص دو ذره برابر صفر است، (ب) خطهای میدان الکتریکی خالص را رسم کنید.



شکل ۱۸-۳۶ مسئلهٔ ۱۴

حل:



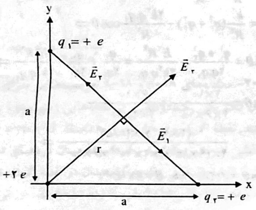
(الف)
$$E_{۱}=E_{۲}\ \Rightarrow\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\frac{۵q}{x^{۲}}=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\frac{۲q}{(x-L)^{۲}}\ \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{۵}}{x}=\pm\frac{\sqrt{۲}}{(x-L)}\Rightarrow\sqrt{۵}x-\sqrt{۵}L=\sqrt{۲}x\ \Rightarrow$$

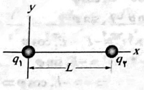
$$x=\frac{\sqrt{۵}L}{\sqrt{۵}-\sqrt{۲}}\ \Rightarrow x=۲/۷۲L$$

پاسخ با منفی برابر $x=۰/۶۱L$ بدست می‌آید که غیرقابل قبول است.

(ب)

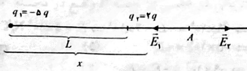


●●●۱۵- در شکل ۱۸-۳۷، سه ذره در مکان های خود ثابت شده‌اند و دارای بارهای $q_{۱}=q_{۲}=+e$ و $q_{۳}=+۲e$ هستند. فاصلهٔ a برابر $۶/۰۰\mu m$ است. (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان الکتریکی خالص ناشی از ذره‌ها در نقطهٔ P چگونه است؟



شکل ۱۸-۳۷ مسئلهٔ ۱۵

حل:



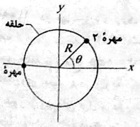
$\vec{E}_{۱}$ و $\vec{E}_{۲}$ یکدیگر را خنثی می‌کنند. $r=\frac{\sqrt{۲}}{۲}a=۴/۲۴(\mu m)$

(الف)

$$E=E_{۳}=\frac{kq_{۳}}{r^{۲}}=(۹\times۱۰^{۹})\frac{(۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۴/۲۴\times۱۰^{-۶})^{۲}}=۱۶۰/۲\ N/C$$

(ب) جهت E همان جهت $E_{۳}$ یعنی با محور x زاویه ۴۵° می‌سازد.

●●●۱۶- شکل ۱۸-۳۸، حلقه‌ای پلاستیکی به شعاع $R=۵۰/۰$cm را نشان می‌دهد. دو مهرهٔ باردار کوچک روی حلقه قرار دارند: مهرهٔ ۱ با بار $+۲/۰۰\mu C$ در مکان خود در سمت چپ ثابت شده است ؛ مهرهٔ ۲ با بار $+۶/۰۰\mu C$ می‌تواند روی حلقه جابه‌جا شود. دو مهره، میدان الکتریکی خالصی به بزرگی E را در مرکز حلقه ایجاد می‌کنند. مهرهٔ ۲ دو باید در چه زاویهٔ θ (الف) مثبت و (ب) منفی قرار داده شود تا $E=۲/۰۰\times۱۰^{۵}$ N/C باشد؟



شکل ۱۸-۳۸ مسئلهٔ ۱۶

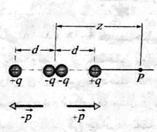
$$\frac{E}{E_r}=\frac{\dfrac{qd}{۲\pi\varepsilon_\circ z^۳}}{\dfrac{۲zqd}{۴\pi\varepsilon_\circ\left(z^۲-\dfrac{d^۲}{۴}\right)^۲}}=\frac{\left(z^۲-\dfrac{d^۲}{۴}\right)^۲}{z^۴}\Rightarrow$$

$$\frac{E}{E_r}=\frac{\left(۲۵d^۲-\dfrac{d^۲}{۴}\right)^۲}{(۵d)^۴}=\frac{\left(۲۵-\dfrac{۱}{۴}\right)^۲}{۶۲۵}=۰/۹۸۰۱$$

●●●۲۱- SSM *چهارقطبی الکتریکی.* شکل ۱۸-۴۱، یک چهار قطبی الکتریکی را نشان می‌دهد، که شامل دو دوقطبی است که بزرگی گشتاورهای دو قطبی آنها برابر ولی جهت آنها مخالف یکدیگر است. نشان دهید که مقدار E روی محور چهار قطبی برای نقطهٔ P به فاصلهٔ z از مرکز آن (با فرض $z \gg d$) با رابطهٔ زیر داده می‌شود

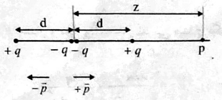
$$E=\frac{۳Q}{۴\pi\varepsilon_\circ z^۴}$$

که در آن $Q(=۲qd^۲)$ گشتاور *چهار قطبی* توزیع بار نامیده می‌شود.



شکل ۱۸-۴۱ مسئلهٔ ۲۱

حل:



$$E_۱=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ(z-d)^۲}$$

$$E_۲=E_۳=\frac{-q}{۴\pi\varepsilon_\circ z^۲}$$

$$E_۴=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ(z+d)^۲}$$

$$E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{۱}{(z-d)^۲}-\frac{۲}{z^۲}+\frac{۱}{(z+d)^۲}\right]\Rightarrow$$

$$E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{z^۲(z^۲+d^۲+۲dz)-۲(z^۲-d^۲)^۲+z^۲(z^۲+d^۲-۲zd)}{(z-d)^۲z^۲(z+d)^۲}\right]\Rightarrow$$

$$E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\times\frac{۶z^۲d^۲-۲d^۴}{(z^۲-d^۲)^۲z^۲}$$

$$z>>d\Rightarrow E=\frac{۶qz^۲d^۲}{۴\pi\varepsilon_\circ z^۶}=\frac{۳(۲qd^۲)}{۴\pi\varepsilon_\circ z^۴}=\frac{۳Q}{۴\pi\varepsilon_\circ z^۴}$$

که در آن Q گشتاور چهار قطبی توزیع بار است. $Q=۲qd^۲$

بخش ۱۸-۶ میدان الکتریکی ناشی از یک خط باردار

●۲۲- *چگالی، چگالی، چگالی.* (الف) بار $-۳۰۰e$ روی کمانی دایره‌ای به شعاع ۴/۰۰cm در یک زاویهٔ °۴۰، به طور یکنواخت توزیع شده است. چگالی بار خطی روی کمان چقدر است؟ (ب) بار $-۳۰۰e$ روی یک طرف قرصی دایره‌ای به شعاع ۲/۰۰cm به طور یکنواخت توزیع شده است. چگالی بار سطحی روی این وجه چقدر است؟ (پ) بار $-۳۰۰e$ روی سطح کره‌ای به شعاع ۲/۰۰cm به طور یکنواخت توزیع شده است. چگالی بار سطحی روی این سطح چقدر است؟ (ت) بار $-۳۰۰e$ در حجم کره‌ای به شعاع ۲/۰۰cm به طور یکنواخت پخش شده است. چگالی بار حجمی در این کره چقدر است؟

حل: (الف)

$$\lambda=\frac{q}{R\theta}=\frac{(-۳۰۰)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{(۰/۰۴)\left(\dfrac{۴۰\pi}{۱۸۰}\right)}=-۱/۷۲\times۱۰^{-۱۵}\ C/m$$

(ب) $$\sigma=\frac{q}{\pi R^۲}=\frac{(-۳۰۰)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{\pi(۰/۰۲)^۲}=-۳/۸۲\times۱۰^{-۱۴}\ C/m^۲$$

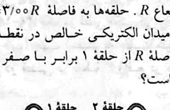
(پ) $$\sigma=\frac{q}{۴\pi R^۲}=\frac{(-۳۰۰)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۴\pi(۰/۰۲)^۲}$$

$$=-۹/۵۵\times۱۰^{-۱۵}\ C/m^۲$$

(ت) $$\rho=\frac{q}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳}=\frac{(-۳۰۰)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{\frac{۴}{۳}\pi(۰/۰۲)^۳}$$

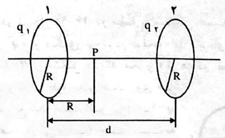
$$=-۱/۴۳\times۱۰^{-۱۲}\ C/m^۳$$

●۲۳- شکل ۱۸-۴۲، دو حلقهٔ نارسانای موازی را نشان می‌دهد که محورهای مرکزی آنها روی یک خط مشترک قرار دارند. حلقهٔ ۱ با باریکنواخت $q_۱$ و شعاع R؛ حلقهٔ ۲ با بار یکنواخت $q_۲$ و همان شعاع R. حلقه‌ها به فاصلهٔ $d=۳/۰۰R$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ P روی خط مشترک، در فاصلهٔ R از حلقهٔ ۱ برابر با صفر است. نسبت $q_۱/q_۲$ چقدر است؟



شکل ۱۸-۴۲ مسئلهٔ ۲۳

حل:



$$d=۳R$$

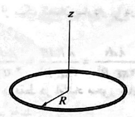
حلقه $$E=\frac{qz}{۴\pi\varepsilon_\circ(z^۲+R^۲)^{۳/۲}}$$

در نقطه P: $E_۱=E_۲$

$$\frac{q_۱R}{۴\pi\varepsilon_\circ(۲R^۲)^{۳/۲}}=\frac{q_۲(۲R)}{۴\pi\varepsilon_\circ(۴R^۲+R^۲)^{۳/۲}}\Rightarrow$$

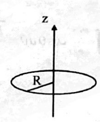
$$\frac{q_۱}{۲^{۳/۲}}=\frac{۲q_۲}{۵^{۳/۲}}\Rightarrow\frac{q_۱}{q_۲}=۲\times\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۳/۲}=۰/۵۰۶$$

●●۲۴- یک میلهٔ نارسانای باریک با توزیع یکنواخت بار مثبت Q به شکل دایره‌ای به شعاع R درآمده است (شکل ۱۸-۴۹). محور عمودی در مرکز حلقه محور z است که مبداء آن بر مرکز حلقه قرار دارد. بزرگی میدان الکتریکی ناشی از میله در (الف) $z=۰$ و (ب) $z=\infty$ چقدر است؟ (پ) برحسب R، در چه مقدار مثبتی از z، این بزرگی بیشینه است؟ (ت) اگر $R=۲/۰۰cm$ و $Q=۴/۰۰\mu C$ باشد، آن مقدار بیشینه چقدر است؟



شکل ۱۸-۴۳ مسئلهٔ ۲۴

حل:



میدان حلقه نازکی به شعاع R که بار q بطور یکنواخت روی آن توزیع شده است از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$E=\frac{qz}{۴\pi\varepsilon_\circ(z^۲+R^۲)^{۳/۲}}$$

(الف) و **(ب)** میدان در $z=۰$ و $z=\infty$ صفر است.

(پ) $$E=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[z(z^۲+R^۲)^{-۳/۲}\right]\Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dz}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[(z^۲+R^۲)^{-۳/۲}+z\left(\frac{-۳}{۲}\right)(۲z)(z^۲+R^۲)^{-۵/۲}\right]\Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dz}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{z^۲+R^۲-۳z^۲}{(z^۲+R^۲)^{۵/۲}}\right)=۰\Rightarrow$$

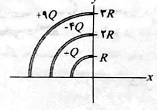
$$R^۲-۲z^۲=۰\Rightarrow z=\pm\frac{R}{\sqrt{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=۱/۴۱(cm)$$

(ت) $$E=\frac{qz}{۴\pi\varepsilon_\circ(z^۲+R^۲)^{۳/۲}}\Rightarrow$$

$$E=(۹\times۱۰^۹)\frac{۴\times۱۰^{-۶}\times(۱/۴۱\times۱۰^{-۲})}{\left[(۱/۴۱\times۱۰^{-۲})^۲+(۰/۰۲)^۲\right]^{۳/۲}}$$

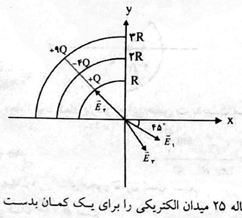
$$=۳/۴۶\times۱۰^۷\ N/C$$

●●۲۵- شکل ۱۸-۴۴، سه کمان دایره‌ای را به مرکز مبداء یک دستگاه مختصات نشان می‌دهد. روی هر کمان، بارهایی برحسب $Q=۲/۰۰\mu C$ به طور یکنواخت توزیع شده‌اند. شعاع‌ها برحسب $R=۱۰/۰cm$ داده شده‌اند. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت x) میدان الکتریکی خالص ناشی از کمان‌ها در مبدأ چگونه است؟



شکل ۱۸-۴۴ مسئلهٔ ۲۵

حل:



در مساله ۲۵ میدان الکتریکی را برای یک کمان بدست آورده بودیم.

(الف) در این مساله φ برای هر سه کمان برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

$$E=\frac{Q}{۲\pi\varepsilon_\circ R^۲}\frac{\sin\frac{\varphi}{۲}}{\varphi}$$

$$E_۱=\frac{Q}{۲\pi\varepsilon_\circ R^۲}\frac{\sin ۴۵}{\frac{\pi}{۲}}=\frac{Q\sin ۴۵}{\pi^۲\varepsilon_\circ R^۲}$$

$$E_۲=\frac{-۴Q}{۲\pi\varepsilon_۰(۴R^۲)}\frac{\sin ۴۵}{\frac{\pi}{۲}}=\frac{-Q\sin ۴۵}{\pi^۲\varepsilon_۰R^۲}$$

$$E_۳=\frac{۹Q}{۲\pi\varepsilon_۰(۹R^۲)}\frac{\sin ۴۵}{\frac{\pi}{۲}}=\frac{Q\sin ۴۵}{\pi^۲\varepsilon_۰R^۲}$$

$$E=E_۱+E_۲+E_۳\Rightarrow$$

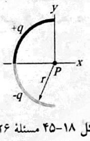
$$E_۲=\frac{Q\sin ۴۵}{\pi^۲\varepsilon_۰R^۲}-\frac{Q\sin ۴۵}{\pi^۲\varepsilon_۰R^۲}+\frac{Q\sin ۴۵}{\pi^۲\varepsilon_۰R^۲}=\frac{۴Q}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\sin ۴۵}{\pi R^۲}\Rightarrow$$

$$E=(۹\times۱۰^۹)(۴\times۲\times۱۰^{-۶})\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{۱}{\pi\times(۰/۱)^۲}\right)$$

$$=۱/۶۲\times۱۰^۶\ \text{N/C}$$

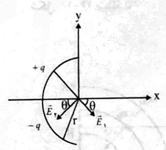
(ب) جهت میدان الکتریکی با زاویه -۴۵° نسبت به جهت مثبت محور x می‌باشد.

●●۲۶- در شکل ۱۸-۴۵، یک میلهٔ شیشه‌ای باریک به شکل نیم دایره‌ای به شعاع $r=۵/۰۰\text{cm}$ درآمده است. بار $+q=۴/۵۰\text{pC}$ به طور یکنواخت روی نیمهٔ بالایی، و بار $-q=-۴/۵۰\text{pC}$ به طور یکنواخت روی نیمهٔ پایینی توزیع شده است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی در نقطهٔ P، واقع در مرکز نیم‌دایره چگونه است؟



شکل ۱۸-۴۵ مسئلهٔ ۲۶

حل:



(الف) معادله یک کمان باردار به این صورت بدست می‌آید (مسأله ۲۵):

$$E=\frac{Q}{۲\pi\varepsilon_۰R^۲}\frac{\sin\frac{\varphi}{۲}}{\varphi}$$

جهت میدان در راستای محور تقارن کمان است.

در این مسأله $\varphi=\frac{\pi}{۲}$ است.

$$E_۱=E_۲=\frac{۲Q}{۴\pi\varepsilon_۰R^۲}\frac{\sin\frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۲}}=\frac{(۹\times۱۰^۹)\times۲\times(۴/۵\times۱۰^{-۱۲})}{(۰/۰۵)^۲}$$

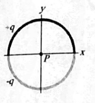
$$\times(۰/۴۵)\Rightarrow$$

$$E_۱=E_۲=۱۴/۵۸\ \text{N/C}$$

$$E_{\text{total}}=۲E_۱\sin ۴۵=(۲)(۱۴/۵۸)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=۲۰/۶۲\ \text{N/C}$$

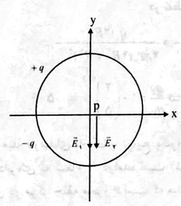
(ب) جهت میدان در خلاف جهت میدان y است.

●●۲۷- در شکل ۱۸-۴۶، دو میلهٔ پلاستیکی خمیده، یکی دارای بار $+q$ و دیگری $-q$، در صفحهٔ xy دایره‌ای به شعاع $R=۸/۵۰\text{cm}$ را تشکیل داده‌اند. محور x از هر دو نقطهٔ اتصال می‌گذرد، و بار به طور یکنواخت روی هر دو میله توزیع شده است. اگر $q=۱۵/۰\text{pC}$ باشد، (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی $\vec{E}$ ایجاد شده در نقطهٔ P، واقع در مرکز دایره چگونه است؟

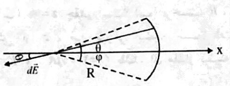


شکل ۱۸-۴۶ مسئلهٔ ۲۷

حل:



(الف)



ابتدا میدان ناشی از یک کمان باردار را در مرکز آن بدست می‌آوریم.

$$dE=\frac{dq}{۴\pi\varepsilon_۰R^۲}=\frac{\lambda ds}{۴\pi\varepsilon_۰R^۲}=\frac{\lambda Rd\theta}{۴\pi\varepsilon_۰R^۲}=\frac{\lambda d\theta}{۴\pi\varepsilon_۰R}$$

به علت تقارن میدان فقط در امتداد محور تقارن کمان است که در اینجا محور x می‌باشد.

$$dE_x=dE\cos\theta=\frac{\lambda\cos\theta d\theta}{۴\pi\varepsilon_۰R}$$

$$E=\int dE_x=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰R}\int_{-\varphi/۲}^{\varphi/۲}\cos\theta\, d\theta=\frac{\frac{Q}{R\varphi}\left(۲\sin\frac{\varphi}{۲}\right)}{۴\pi\varepsilon_۰R}$$

$$E=\frac{Q}{۲\pi\varepsilon_۰R^۲}\frac{\sin\frac{\varphi}{۲}}{\varphi}$$

$E_۱=E_۲$ برای هر دو نیم حلقه $\varphi=\pi$ می‌باشد.

$$E_{\text{total}}=E_۱+E_۲=۲E_۱=\frac{۲q}{۲\pi\varepsilon_۰R^۲}\frac{\sin\frac{\pi}{۲}}{\pi}=\frac{q}{\pi^۲\varepsilon_۰R^۲}\Rightarrow$$

$$E_{\text{total}}=\frac{۱۵\times۱۰^{-۱۲}}{\pi^۲(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۸/۵\times۱۰^{-۲})^۲}=۲۳/۷۷\ \text{N/C}$$

(ب) جهت میدان در خلاف جهت محور y می‌باشد.

●●۲۸- بار به طور یکنواخت به دور حلقه‌ای به شعاع $R=۲/۴۰\text{cm}$ توزیع شده‌است، و بزرگی E میدان الکتریکی ناشی از آن روی محور مرکزی حلقه (عمود بر صفحهٔ آن) اندازه‌گیری می‌شود. در چه فاصله‌ای از مرکز حلقه، E بیشینه است؟

حل:

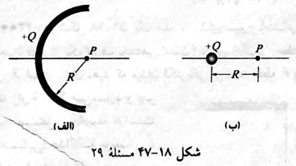
$$E=\frac{qz}{۴\pi\varepsilon_۰(z^۲+R^۲)^{۳/۲}}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}z(z^۲+R^۲)^{-۳/۲}$$

$$\frac{dE}{dz}=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\left[(z^۲+R^۲)^{-۳/۲}+z\left(\frac{-۳}{۲}\right)(۲z)(z^۲+R^۲)^{-۵/۲}\right]$$

$$=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\times\frac{R^۲+z^۲-۳z^۲}{(z^۲+R^۲)^{۵/۲}}=۰\Rightarrow$$

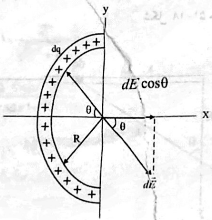
$$R^۲-۲z^۲=۰\Rightarrow z=\pm\frac{R}{\sqrt{۲}}=\pm=\frac{۲/۴}{\sqrt{۲}}\pm۱/۷\,\text{cm}$$

●●۲۹- شکل ۱۸-۴۷ الف، میلهٔ نارسانایی را نشان می‌دهد که روی آن بار $+Q$ به طور یکنواخت توزیع شده است. میله به شکل یک نیم‌دایره به شعاع R درآمده است و میدانی الکتریکی به بزرگی $E_{\text{کمان}}$ را در مرکز خمیدگی P ایجاد می‌کند. اگر این کمان به نقطه‌ای در فاصلهٔ R از P فشرده شود (شکل ۱۸-۴۷ ب)، بزرگی میدان الکتریکی در نقطهٔ P در چه عاملی باید ضرب شود؟



شکل ۱۸-۴۷ مسئلهٔ ۲۹

حل:



$$dE=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{d\theta}{R^۲}-E=\int dE$$

$$E_{\text{کمان}}=Ex=\int\cos\theta\, dE$$

$$\lambda=Q/L\quad L=R\theta\rightarrow Q=\lambda R\theta\rightarrow dQ=\lambda Rd\theta$$

$$E_{\text{کمان}}=\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\lambda R}{R^۲}\cos\theta\, d\theta$$

$$=\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_۰R}\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\cos\theta\, d\theta=\frac{\lambda}{۲\pi\varepsilon_۰R}$$

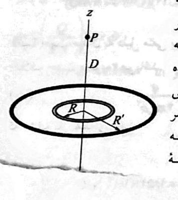
داریم: $\lambda=Q/L=Q/R\pi$: داریم

$$E_{\text{کمان}}=\frac{Q/R\pi}{۲\pi\varepsilon_۰R}=\frac{Q}{۲\pi^۲\varepsilon_۰R^۲}$$

$$E_{\text{ذره}}=\frac{Q}{۴\pi\varepsilon_۰R^۲}$$

$$\frac{E_{\text{ذره}}}{E_{\text{کمان}}}=\frac{Q/۴\pi\varepsilon_۰R^۲}{Q/۲\pi^۲\varepsilon_۰R^۲}=\frac{\pi}{۲}$$

●●۳۰- شکل ۱۸-۴۸، دو حلقهٔ هم مرکز را یکی به شعاع R و دیگری به شعاع $R'=۳/۰۰R$ نشان می‌دهد که در سطح یکسانی قرار دارند. نقطهٔ P روی محور z مرکزی و به فاصلهٔ $D=۲/۰۰R$ از مرکز حلقه واقع است. حلقهٔ کوچکتر دارای بار $+Q$ است که به طور یکنواخت توزیع شده است. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ P برابر صفر باشد، برحسب Q چه باری به طور یکنواخت روی حلقهٔ بزرگتر توزیع شده است؟



شکل ۱۸-۴۸ مسئلهٔ ۳۰

حل:

$$R'=۳R$$

$$E=\frac{qz}{۴\pi\varepsilon_۰(z^۲+R^۲)^{۳/۲}}$$

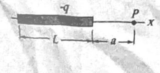
$$E=E_۱+E_۲=۰\Rightarrow$$

$$\frac{kQz}{(z^۲+R^۲)^{۳/۲}}+\frac{kqz}{(z^۲+۹R^۲)^{۳/۲}}=۰\Rightarrow$$

$$\frac{Q}{(۵R^۲)^{۳/۲}}=\frac{-q}{(۱۳R^۲)^{۳/۲}}\Rightarrow q=-\left(\frac{۱۳}{۵}\right)^{۳/۲}Q$$

$$\Rightarrow q=-۴/۱۹Q$$

●●۳۱- SSM ILW WWW در شکل ۱۸-۴۹، یک میلهٔ نارسانا به طول $L=۸/۱۵\text{cm}$ دارای بار $-q=-۴/۲۳\text{fC}$ است که به طور یکنواخت در طول آن توزیع شده است. (الف) چگالی خطی بار میله چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی ایجاد شده در نقطهٔ P، واقع در فاصلهٔ $a=۱۲/۰\text{cm}$ از میله، چگونه است؟ بزرگی میدان الکتریکی ایجاد شده در فاصلهٔ $a=۵۰\text{cm}$ توسط (ت) میله و (ث) ذره‌ای دارای بار $-q=-۴/۲۳\text{fC}$ که به جای میله قرار داده شود، چقدر است؟

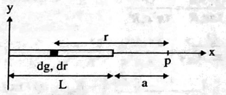


شکل ۱۸-۴۹ مسئلهٔ ۳۱

حل: (الف)

$$\lambda=\frac{q}{L}=\frac{-4/23\times10^{-15}}{8/15\times10^{-2}}=-5/19\times10^{-14}\ \mathrm{C/m}$$

(ب)



$$dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}=\frac{\lambda\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_a^{a+L}\frac{dr}{r^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{L+a}\right]=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L}{a(L+a)}$$

$$E=(9\times10^{9})(5/19\times10^{-14})\frac{(8/15\times10^{-2})}{(0/12)(0/12+0/0815)}$$

$$=1/57\times10^{-3}\ \mathrm{N/C}$$

(پ) جهت میدان به دلیل منفی بودن بار به طرف میله یعنی در خلاف جهت محور x می‌باشد.

(ت) $a>>L\Rightarrow E=\dfrac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$

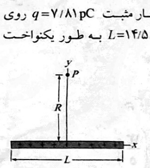
که مشابه بار نقطه‌ای است.

$a=50\,(\mathrm{cm})$

$$E=\frac{(9\times10^{9})(4/23\times10^{-15})}{(0/5)^2}=1/52\times10^{-4}\ \mathrm{N/C}$$

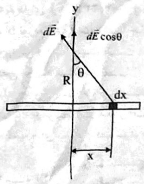
$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{(9\times10^{9})(4/23\times10^{-15})}{(0/5)^2}=1/52\times10^{-4}\ \mathrm{N/C}$$

●●●۳۲- GO در شکل ۱۸-۵۰، بار مثبت $q=7/81\,\mathrm{pC}$ روی میلهٔ نارسانای باریکی به طول $L=14/5\,\mathrm{cm}$ به طور یکنواخت توزیع شده است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) میدان الکتریکی ایجاد شده در نقطهٔ P، به فاصلهٔ $R=6/00\,\mathrm{cm}$ از میله و در امتداد عمود منصف آن، چگونه است؟



شکل ۱۸-۵۰ مسئلهٔ ۳۲

حل:



$$E=\int dy_E=\int_{-L/2}^{L/2}dE\cos\theta=2\int_0^{L/2}dE\cos\theta$$

$$=\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{L/2}\frac{\lambda\,dx}{R^2+x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$=\frac{2\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{L/2}\frac{dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

از تغییر متغییر زیر استفاده می‌کنیم:

$$x=R\tan\theta-dx=R\sec^2\theta\,d\theta$$

$$x^2+R^2=R^2(1+\tan^2\theta)=R^2\sec^2\theta$$

داریم:

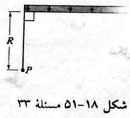
$$E=\frac{2\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{R\sec^2\theta}{R^3\sec^3\theta}d\theta=\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta=\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\Bigg|_0^{L/2}$$

$$=\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{L/2}{\sqrt{R^2+L^2/4}}$$

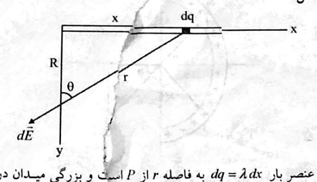
$$=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R}\frac{1}{\sqrt{4R^2+L^2}}=12/4\,\mathrm{N/C}$$

●●●۳۳- در شکل ۱۸-۵۱، یک میلهٔ نارسانای «نیم- نامتناهی» (یعنی، فقط از یک طرف نامتناهی است) دارای چگالی خطی بار λ است. نشان دهید که میدان الکتریکی $\vec{E}_p$ در نقطهٔ P با میله زاویهٔ 45° می‌سازد و این نتیجه مستقل از فاصلهٔ R است. (*راهنمایی:* جداگانه مؤلفهٔ $\vec{E}_p$ موازی با میله و مؤلفهٔ عمود بر میله را بیابید.)



شکل ۱۸-۵۱ مسئلهٔ ۳۳

حل:



عنصر بار $dq=\lambda\,dx$ به فاصله r از P است و بزرگی میدان در نقطه P از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dx}{r^2}$$

که مولفه‌های x و y آن به ترتیب برابر $dE\,x=dE\sin\theta$ به سمت چپ و $dEy=dE\cos\theta$ رو به پایین است.

$$Ex=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{\lambda\,dx}{R^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}=\frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\Bigg|_0^{\infty}$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$Ey=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{\lambda\,dx}{R^2+x^2}\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$=\frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

با تغییر متغیر $x=R\tan\theta$ داریم $R^2+x^2=R^2\sec^2\theta$ و $dx=R\sec^2\theta\,d\theta$.

$$Ey=\frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\frac{R\sec^2\theta}{R^3\sec^3\theta}d\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

با توجه به اینکه مولفه‌های افقی و قائم میدان بی‌توجه به مقدار R همواره با هم برابرند. نتیجه می‌گیریم که $\vec{E}$ برای تمامی مقادیر R با میله زاویه 45° می‌سازد. گ

بخش ۱۸-۷ میدان الکتریکی ناشی از یک قرص باردار

●۳۴- قرصی به شعاع $2/5\,\mathrm{cm}$ دارای چگالی سطحی بار $5/3\,\mu\mathrm{C/m^2}$ روی وجه بالایی خود است. بزرگی میدان الکتریکی ایجاد شده توسط قرص در نقطه‌ای روی محور مرکزی و به فاصلهٔ $z=12\,\mathrm{cm}$ از آن، چگونه است؟

حل: میدان الکتریکی قرص باردار به شعاع R با چگالی سطحی σ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}\right)$$

$$=\frac{5/3\times10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}}{2\times8/85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}}\left[1-\frac{12\cos}{\sqrt{(12\,\mathrm{cm})^2+(2/5\,\mathrm{cm})^2}}\right]$$

$$=6/3\times10^{3}\ \mathrm{N/C}$$

●۳۵- WWW SSM در چه فاصله‌ای روی محور عمود در مرکز یک قرص پلاستیکی باردار یکنواخت به شعاع $0/600\,\mathrm{m}$، بزرگی میدان الکتریکی برابر با نصف بزرگی این میدان در مرکز سطح قرص است؟

حل: از مساله قبل می‌دانیم که میدان در مرکز قرص با صفر قرار دادن Z در رابطه $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\dfrac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}\right)$ و برابر با $E_0=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ بدست می‌آید.

$$\frac{E}{E_0}=\frac{1}{2}\rightarrow\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{Z}{Z^2+R^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\rightarrow$$

$$\frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}=\frac{1}{2}\rightarrow Z^2=\frac{1}{4}(Z^2+R^2)\rightarrow Z=R/\sqrt{3}\rightarrow$$

$$Z=0/346\,\mathrm{m}$$

●●۳۶- یک قرص پلاستیکی دایره‌ای به شعاع $R=2/00\,\mathrm{cm}$ دارای بار $Q=+(2/00\times10^{6})e$ است که به طور یکنواخت روی یک سطح آن توزیع شده است. حلقه‌ای دایره‌ای به پهنای $30\,\mu\mathrm{m}$ هم‌مرکز با قرص و با شعاع $r=0/50\,\mathrm{cm}$ روی آن سطح قرار گرفته است. برحسب کولن، چه باری در پهنای حلقه قرار دارد؟

حل:

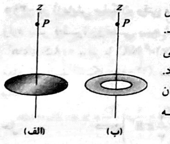
$$\left.\begin{aligned}&dq=\sigma\,ds\\&S=\pi r^2\rightarrow ds=2\pi r\,dr\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$dq=\left(\frac{Q}{\pi R^2}\right)2\pi r\,dr$$

با قرار دادن $r=5\times10^{-3}\ \mathrm{m}$ و $dr=30\times10^{-6}\ \mathrm{m}$ داریم:

$$dq=2/4\times10^{-16}\ C$$

●●۳۷- فرض کنید شما قرار است وسیله‌ای را طراحی کنید که در آن یک قرص باردار یکنواخت به شعاع R، میدانی الکتریکی ایجاد کند. بزرگی این میدان در امتداد محور عمود در مرکز، در نقطهٔ P به فاصلهٔ $2/00R$ از قرص (شکل ۱۸-۵۲ الف) بیشترین اهمیت را دارد. برآورد هزینه‌ها شما را بر آن می‌دارد که قرص را با حلقه‌ای با همان شعاع خارجی R ولی با شعاع داخلی $R/2/00$ (شکل ۱۸-۵۴ ب) جایگزین کنید. فرض کنید حلقه همان چگالی سطحی بار قرص اولیه را دارد. با این حلقه، بزرگی میدان الکتریکی در نقطهٔ P با چه درصدی کاهش می‌یابد؟



شکل ۱۸-۵۲ مسئلهٔ ۳۷

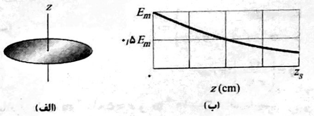
حل: با توجه به شکل مسأله درمی‌یابیم که میدان در شکل ب به اندازه میدان یک قرص دایره‌ای با شعاع $R/2$ از میدان در شکل الف کوچکتر است. یعنی

$$E_b=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{2R}{\sqrt{(2R)^2+R^2}}\right)-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{2R}{\sqrt{(2R)^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2}}\right)$$

که جمله اول سمت راست برابر با E_a می‌باشد.

$$\frac{E_a-E_b}{E_a}=\frac{1-\frac{۲}{\sqrt{۴+\frac{۱}{۴}}}}{1-\frac{۲}{\sqrt{۴+۱}}}=۰/۲۸۳=۲۸/۳\%$$

●●۳۸- شکل ۱۸-۵۳ الف، قرصی دایره‌ای با بار یکنواخت را نشان می‌دهد. مبداء محور مرکزی z که عمود بر صفحهٔ قرص است، روی آن قرار دارد. شکل ۱۸-۵۳ ب، بزرگی میدان الکتریکی را روی آن محور برحسب بزرگی بیشینهٔ E_m روی سطح قرص نشان می‌دهد. مقیاس محور z با $z_s=۸/۰\,cm$ مشخص شده است؟ شعاع قرص چقدر است؟



شکل ۱۸-۵۳ مسئلهٔ ۳۸

حل: از مسائل قبل داریم $\frac{E}{E_m}=۱-\frac{Z}{\sqrt{Z^۲+R^۲}}$ با توجه به شکل مسأله مقدار E در $Z=۴\,cm$ برابر با $\frac{۱}{۲}E_m$ است، پس با توجه به مسأله قبل داریم: $R=Z\sqrt{Z}=۶/۹$

بخش ۱۸-۸ بار نقطه‌ای در میدان الکتریکی

●۳۹- در آزمایش میلیکان، وقتی میدان الکتریکی رو به پایین وارد بر قطرهٔ روغنی به شعاع $۱/۶۴\mu m$ و چگالی $۰/۸۵۱\,g/cm^۳$ برابر با $۱/۹۲\times۱۰^۵\,N/C$ باشد، قطره در اتاقک C معلق می‌ماند (شکل ۱۸-۱۴). بار روی قطره را برحسب e بیابید.

حل:

$$F=qE=mg=\rho Vg=\rho\left(\frac{۴}{۳}\pi R^۳\right)g\Rightarrow$$

$$qE=\rho\left(\frac{۴}{۳}\pi R^۳\right)g\Rightarrow q=\frac{\frac{۴}{۳}\pi R^۳g\rho}{E}\Rightarrow$$

$$q=\frac{\left(\frac{۴}{۳}\right)(\pi)(۱/۶۴\times۱۰^{-۶})^۳(۹/۸)(۸۵۱)}{۱/۹۲\times۱۰^۵}=۸/۰۲\times۱۰^{-۱۹}\,C$$

$q=۵e$

●۴۰- GO الکترونی با تندی $۵/۰۰\times۱۰^۸\,cm/s$ وارد میدانی الکتریکی به بزرگی $۱/۰۰\times۱۰^۳\,N/C$ می‌شود و در طول خط میدان در جهتی پیش می‌رود که حرکتش را کند می‌کند. (الف) این الکترون پیش از توقف لحظه‌ای چه مسافتی را می‌پیماید؟ و (ب) زمان سپری شده چقدر است؟ (پ) اگر طول ناحیه‌ای که میدان الکتریکی را در بردارد برابر $۸/۰۰\,mm$ باشد (که برای توقف الکترون در داخل آن بسیار کوچک است)، چه کسری از انرژی جنبشی اولیهٔ الکترون در این ناحیه از دست می‌رود؟

حل: (الف) $W=Fx=(eE)x=K\quad,\quad K=\frac{۱}{۲}mV_۰^۲\Rightarrow$

$$eE_x=\frac{۱}{۲}mv_۰^۲=x=\frac{mv_۰^۲}{۲eE}=\frac{(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})(۵\times۱۰^۶)^۲}{(۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱\times۱۰^۳)}\Rightarrow$$

$x=۰/۰۷۱۱\,m$

(ب) $x=\frac{v+v_۰}{۲}t\Rightarrow t=\frac{۲x}{v+v_۰}=\frac{(۲)(۰/۰۷۱۱)}{۵\times۱۰^۶+۰}$

$=۲/۸۴\times۱۰^{-۸}\,s$

(پ) $(eE)x=\Delta K\Rightarrow\Delta K=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱\times۱۰^۳)(۸\times۱۰^{-۳})$

$=۱/۲۸\times۱۰^{-۱۸}\,J$

$$\frac{\Delta K}{K_۰}\times۱۰۰=\frac{۱/۲۸\times۱۰^{-۱۸}}{\left(\frac{۱}{۲}\right)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})(۵\times۱۰^۶)^۲}\times۱۰۰=۱۱/۲۵\%$$

●۴۱- SSM یک سامانهٔ ابر باردار در هوای نزدیک سطح زمین، میدان الکتریکی ایجاد می‌کند. وقتی ذره‌ای دارای بار $-۲/۰\times۱۰^{-۹}\,C$ در این میدان قرار گیرد، نیروی الکترواستاتیکی رو به پایینی به بزرگی $۳/۰\times۱۰^{-۶}\,N$ برآن وارد می‌شود. (الف) بزرگی میدان الکتریکی چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت نیروی الکتروستاتیکی $\vec{F}_{el}$ وارد بر پروتونی که در این میدان قرار گیرد، چگونه است؟ (ت) بزرگی نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر پروتون چقدر است؟ (ث) نسبت F_{el}/F_g در این حالت چیست؟

حل: (الف) $F=qE\Rightarrow E=\frac{F}{q}=\frac{۳\times۱۰^{-۶}}{۲\times۱۰^{-۹}}=۱۵۰۰\,N/C$

چون بار ذره منفی است و نیرو رو به پایین به آن وارد می‌شود میدان به سمت بالاست.

(ب) $F_{el}=qE=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۱۵۰۰)=۲/۴\times۱۰^{-۱۶}\,N$

(پ) چون بار پروتون مثبت و میدان به سمت بالاست نیروی وارد بر آن نیز به سمت بالاست.

(ت) $F_g=mg=(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷})(۹/۸)=۱/۶۴\times۱۰^{-۲۶}\,N$

(ث) $\frac{F_{el}}{F_g}=\frac{۲/۴\times۱۰^{-۱۶}}{۱/۶۷\times۱۰^{-۲۶}}=۱/۴۶\times۱۰^{+۱۰}$

●۴۲- هوای مرطوب در میدان الکتریکی $۳/۰\times۱۰^۶\,N/C$ دچار فروریزش الکتریکی می‌شود (مولکول‌هایش یونیده می‌شوند.) در این میدان، بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر (الف) الکترون و (ب) یونی با کمبود یک الکترون، چقدر است؟

حل: (الف)

$F=qE=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۳\times۱۰^۶)=۴/۸\times۱۰^{-۱۳}\,N$

(ب) برابر با همان نیروی بالاست چون این نیرو به جرم بستگی ندارد بلکه به مقدار بار بستگی دارد و این یون هم یک بار $+e$ دارد.

●۴۳- SSM الکترونی از حالت سکون در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $۲/۰۰\times۱۰^۴\,N/C$ رها می‌شود. شتاب الکترون را محاسبه کنید. (گرانش را نادیده بگیرید.)

حل: $a=\frac{F}{m}=\frac{eE}{me}=\frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\,C)(۲/۰۰\times۱۰^۴\,N/C)}{۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}}$

$=۳/۵۱\times۱۰^{۱۵}\,m/s^۲$

●۴۴- ذرهٔ آلفا (هستهٔ اتم هلیوم) دارای جرمی برابر با $۶/۶۴\times۱۰^{-۲۷}kg$ و بار $+۲e$ است. (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان الکتریکی که با نیروی گرانشی وارد بر ذره موازنه کند، چیست؟

حل: (الف)

$$qE=mg\Rightarrow E=\frac{mg}{۲e}=\frac{(۶/۶۴\times۱۰^{-۲۷})(۹/۸)}{(۲)(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}\Rightarrow$$

$E=۲/۰۳\times۱۰^{-۷}\,N/C$

(ب) چون ذره α بار مثبت دارد میدان الکتریکی باید قائم روبه بالا باشد تا بتواند اثر نیروی وزن را خنثی کند.

●۴۵- ILW الکترونی روی محور یک دو قطبی الکتریکی در فاصلهٔ $۲۵nm$ از مرکز دو قطبی قرار دارد. در صورتی که گشتاور دو قطبی $۳/۶\times۱۰^{-۲۹}\,C.m$ باشد، بزرگی نیروی الکترواستاتیکی وارد بر الکترون چقدر است؟ فرض کنید که $۲۵nm$ از فاصلهٔ بارهای دوقطبی خیلی بیشتر است.

حل: میدان دو قطبی الکتریکی در نقطه‌ای به فاصله z از محور آن با فرض $z>>d$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$E=\frac{۱}{۲\pi\varepsilon_۰}\frac{p}{z^۳}=\frac{۲}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{p}{z^۳}=(۲)(۹\times۱۰^۹)\frac{۳/۶\times۱۰^{-۲۹}}{(۲۵\times۱۰^{-۹})^۳}\Rightarrow$$

$E=۴/۱۴۷\times۱۰^۴\,N/C$

$F=qE=eE=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۴/۱۴۷\times۱۰^۴)$

$=۶/۶۳۵\times۱۰^{-۱۵}\,N$

●۴۶- الکترونی توسط یک میدان الکتریکی رو به شرق، شتاب $۱/۸۰\times۱۰^۹\,m/s^۲$ می‌گیرد. (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان الکتریکی را تعیین کنید.

حل: (الف)

$$E=\frac{F}{q}=\frac{ma}{m_e}=\frac{(۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}\,kg)(۱/۸\times۱۰^۹\,m/s^۲)}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}$$

$=۰/۰۱۰۲\,N/C$

(ب) جهت میدان به سمت غرب می‌باشد.

●۴۷- SSM باریکه‌هایی از پروتون‌های پرسرعت را می‌توان در «تفنگ‌ها» با استفاده از میدان‌های الکتریکی که پروتونی را شتاب می‌دهند، ایجاد کرد.(الف) اگر میدان الکتریکی تفنگ برابر $۲/۰۰\times۱۰^۴\,N/C$ باشد، شتابی که یک پروتون خواهد داشت چقدر است؟ (ب) اگر این میدان، به پروتون در مسافت $۱/۰۰\,cm$ شتاب دهد، تندی حاصل در پروتون چقدر خواهد بود؟

حل: (الف)

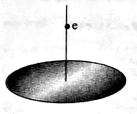
$$F=eE=ma\Rightarrow a=\frac{eE}{m}=\frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۲\times۱۰^۴)}{(۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷})}\Rightarrow$$

$a=۱/۹۲\times۱۰^{۱۲}\,m/s^۲$

(ب) $V^۲-V_۰^۲=۲ax\Rightarrow V^۲-۰=(۲)(۱/۹۲\times۱۰^{۱۲})(۰/۰۱)\Rightarrow$

$V^۲=۳/۸۴\times۱۰^{۱۰}\quad\Rightarrow\quad V=۱/۹۶\times۱۰^۵\,m/s$

●●۴۸- در شکل ۱۸-۵۴، الکترونی (e) از حالت سکون روی محور مرکزی قرص باردار یکنواختی به شعاع R رها می‌شود. چگالی سطحی بار روی قرص برابر $+۴/۰۰\mu C/m^۲$ است. بزرگی شتاب اولیهٔ الکترون در صورتی که از فاصلهٔ (الف) R، (ب) $R/۱۰۰$، و (پ) $R/۱۰۰۰$ از مرکز قرص رها شود، چقدر است؟ (ت) چرا هنگامی که نقطهٔ رها شدن را به قرص نزدیکتر می‌کنیم، بزرگی شتاب فقط اندکی افزایش می‌یابد؟



شکل ۱۸-۵۴ مسئلهٔ ۴۸

حل: میدان یک قرص به شعاع R که بار q روی سطح آن بطور یکنواخت توزیع شده است از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E=\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\left[۱-\frac{z}{\sqrt{z^۲+R^۲}}\right]$$

$$ma=qE\Rightarrow a=\frac{eE}{m}=\frac{e}{m}\times\frac{\sigma}{۲\varepsilon_۰}\left[۱-\frac{z}{\sqrt{z^۲+R^۲}}\right]\Rightarrow$$

$$a=\frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۴\times۱۰^{-۶})}{(۲)(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})}=\left[۱-\frac{z}{\sqrt{z^۲+R^۲}}\right]\Rightarrow$$

$$a=۳/۹۷\times۱۰^{۱۶}\left[۱-\frac{z}{\sqrt{z^۲+R^۲}}\right]$$

(الف) $z=R\Rightarrow a=(۳/۹۷\times۱۰^{۱۶})\left[۱-\frac{z}{\sqrt{R^۲+R^۲}}\right]$

$$=(۳/۹۷\times۱۰^{۱۶})\left[۱-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right]\Rightarrow a=۱/۱۶\times۱۰^{۱۶}\,m/s^۲$$

(ب) $z=\frac{R}{۱۰۰}\Rightarrow a=(۳/۹۷\times۱۰^{۱۶})\left[۱-\frac{\frac{R}{۱۰۰}}{\sqrt{(۰/۰۱R)^۲+R^۲}}\right]$

$$\Rightarrow a=(۳/۹۷\times ۱۰^{۱۶})\left(۱-\frac{۰/۰۱}{\sqrt{۱/۰۰۰۱}}\right)=۳/۹۳\times ۱۰^{۱۶}\ \mathrm{m/s^۲}$$

(پ) $$z=\frac{R}{۱۰۰۰}\Rightarrow a=(۳/۹۷\times ۱۰^{۱۶})\left[۱-\frac{۰/۰۰۱R}{\sqrt{(۰/۰۰۱R)^۲+R^۲}}\right]$$

$$\Rightarrow a=(۳/۹۷\times ۱۰^{۱۶})\left(۱-\frac{۰/۰۰۱}{\sqrt{۱/۰۰۰۰۰۱}}\right)=۳/۹۷\times ۱۰^{۱۶}\ \mathrm{m/s^۲}$$

(ت) با کوچک شدن z شتاب فقط اندکی افزایش می‌یابد چون جمله منفی داخل کروشه فقط کمی کوچکتر می‌شود.

۴۹●●- قطعه‌ای به جرم $۱۰/۰\mathrm{g}$ و بار $+۸/۰۰\times ۱۰^{-۵}\mathrm{C}$ در میدان الکتریکی $\vec{E}=(۳۰۰۰\hat{i}-۶۰۰\hat{j})\mathrm{N/C}$ قرار گرفته است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) نیروی الکتروستاتیکی وارد بر قطعه چیست؟ اگر قطعه از حالت سکون در مبدأ و در زمان $t=۰$ رها شود، مؤلفه‌های (پ) x و (ت) y آن در $t=۳/۰۰\mathrm{s}$ چیست؟

حل: (الف)

$$F=qE=(۸\times ۱۰^{-۵})\sqrt{(۳۰۰۰)^۲+(-۶۰۰)^۲}=۰/۲۴۵\ \mathrm{N}$$

$$\tan\theta=\frac{E_y}{E_x}=\frac{-۶۰۰}{۳۰۰۰}=-۰/۲\Rightarrow\theta=-۱۱/۳۱^\circ$$

(ب) $$F_x=ma_x\Rightarrow a_x=\frac{F_x}{m}=\frac{qE_x}{m}=\frac{(۸\times ۱۰^{-۵})(۳۰۰۰)}{(۰/۰۱)}\Rightarrow$$

$$a_x=۲۴\ \mathrm{m/s^۲}$$

$$x=\frac{۱}{۲}a_xt^۲=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۲۴)(۳)^۲=۱۰۸\ \mathrm{m}$$

(پ) $$F_y=ma_y\Rightarrow a_y=\frac{F_y}{m}=\frac{qE_y}{m}=\frac{(۸\times ۱۰^{-۵})(-۶۰۰)}{(۰/۰۱)}\Rightarrow$$

$$a_y=-۴/۸\mathrm{m/s^۲}$$

(ت) $$y=\frac{۱}{۲}a_yt^۲=\left(\frac{۱}{۲}\right)(-۴/۸)(۳)^۲=-۲۱/۶\ \mathrm{m}$$

۵۰●●- در لحظهٔ معینی، مؤلفه‌های سرعت یک الکترون در حال حرکت میان دو صفحهٔ باردار عبارت‌اند از $v_x=۱/۵\times ۱۰^۵\ \mathrm{m/s}$ و $v_y=۳/۰\times ۱۰^۳\ \mathrm{m/s}$. فرض کنید که میدان الکتریکی میان صفحه‌ها با $\vec{E}=(۱۲۰\ \mathrm{N/C})\hat{j}$ داده شود. برحسب نمادگذاری بردارهای یکه (الف) شتاب الکترون در میدان و (ب) سرعت الکترون، وقتی مختصهٔ x آن به اندازهٔ $۲/۰\mathrm{cm}$ تغییر کند، چیست؟

حل: (الف)

$$F=ma=qE\Rightarrow a=\frac{qE}{m}=\frac{(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۱۲۰)}{(۹/۱\times ۱۰^{-۳۱})}\Rightarrow$$

$$a=۲/۱۱\times ۱۰^{۱۳}\ \mathrm{m/s}$$

چون بار الکترون منفی است نیروی وارد بر آن و در نتیجه شتاب آن در خلاف جهت میدان E است.

$$a=-۲/۱۱\times ۱۰^{۱۳}\ \hat{j}$$

(ب) در امتداد محور x بر الکترون نیرویی وارد نمی‌شود، بنابراین مولفه سرعت در راستای محور x ثابت است.

$$x=v_{x_۰}t\Rightarrow t=\frac{x}{v_{x_۰}}=\frac{۰/۰۲}{۱/۵\times ۱۰^۵}=۱/۳۳\times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{s}$$

$$v_y=at+v_{y_۰}$$

$$\Rightarrow v_y=(-۲/۱۱\times ۱۰^{۱۳})(۱/۳۳\times ۱۰^{-۷})+(۳\times ۱۰^۳)$$

$$v_y=-۲/۸\times ۱۰^۶\ \mathrm{m/s}\Rightarrow\vec{v}=۱/۵\times ۱۰^۵\ \hat{i}-۲/۸\times ۱۰^۶\ \hat{j}$$

$$v=\sqrt{v_x^۲+v_y^۲}=\sqrt{(۱/۵\times ۱۰^۵)^۲+(-۲/۸\times ۱۰^۶)^۲}$$

$$=۲/۸\times ۱۰^۶\ \mathrm{m/s}$$

۵۱●●- فرض کنید که زنبور عسل کره‌ای به قطر $۱/۰۰۰\mathrm{cm}$ با بار $+۴۵/۰\mathrm{pC}$ است که روی سطح آن به طور یکنواخت پخش شده است. هم‌چنین فرض کنید که دانهٔ گرده کره‌ای شکل به قطر $۴۰/۰\mu\mathrm{m}$ است که به علت بار زنبور، $-۱/۰۰\mathrm{pC}$ بار در طرف نزدیک کره و بار $+۱/۰۰\mathrm{pC}$ در طرف دورتر آن القا می‌شود. (الف) بزرگی نیروی الکتروستاتیکی وارد بر دانه از طرف زنبور چقدر است؟ سپس فرض کنید که زنبور دانه را تا فاصلهٔ $۱/۰۰۰\mathrm{mm}$ از نوک کلالهٔ گل ببرد و بار نوک $-۴۵/۰\mathrm{pC}$ باشد. (ب) بزرگی نیروی الکتروستاتیک خالص وارد بر دانه از طرف کلاله چقدر است؟ (پ) آیا دانه روی زنبور می‌ماند یا به طرف کلاله حرکت می‌کند؟

حل: (الف)

$$E=\frac{kq}{r^۲}=\frac{(۹\times ۱۰^۹)(۴۵\times ۱۰^{-۱۲})}{(۰/۰۱)^۲}=۴/۰۵\times ۱۰^۳\ \mathrm{N/C}$$

$$F=Eq=(۴/۰۵\times ۱۰^۳)(۱\times ۱۰^{-۱۲})=۴/۰۵\times ۱۰^{-۹}\ \mathrm{N}$$

(ب) $$E=\frac{kq}{r^۲}=\frac{(۹\times ۱۰^۹)(۴۵\times ۱۰^{-۱۲})}{(۰/۰۰۱)^۲}=۴/۰۵\times ۱۰^۵\ \mathrm{N/C}$$

$$F=Eq=(۴/۰۵\times ۱۰^۵)(۱\times ۱۰^{-۱۲})=۴/۰۵\times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{N}$$

(پ) نیروی وارد شده از طرف کلاله به دانه گرده بزرگتر از نیروی وارده از طرف زنبور است بنابراین دانه به طرف کلاله حرکت می‌کند.

۵۲●●- الکترونی وارد ناحیهٔ میدان الکتریکی یکنواختی که دارای بزرگی $E=۵۰\mathrm{N/C}$ است، می‌شود. سرعت اولیهٔ الکترون $۴۰\mathrm{km/s}$ و در همان جهت میدان الکتریکی است. (الف) تندی الکترون $۱/۵\mathrm{ns}$ پس از ورود به این ناحیه چقدر است؟ (ب) در طی این $۱/۵\mathrm{ns}$، الکترون چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل: (الف) $$ma=qE\Rightarrow a=\frac{eE}{m}=\frac{(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۵۰)}{(۹/۱\times ۱۰^{-۳۱})}$$

$$=۸/۷۹\times ۱۰^{۱۲}\ \mathrm{m/s^۲}$$

$$V=at+V_۰=(-۸/۷۹\times ۱۰^{۱۲})(۱/۵\times ۱۰^{-۹})+۴۰\times ۱۰^۳$$

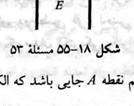
$$=۲/۶۸\times ۱۰^۴\ \mathrm{m/s}$$

چون بار الکترون منفی است نیروی وارد بر آن در خلاف جهت میدان است و حرکت آن کند شونده است بنابراین شتاب آن منفی است.

(ب) $$x=\frac{۱}{۲}at^۲+V_۰t=\left(\frac{۱}{۲}\right)(-۸/۷۹\times ۱۰^{۱۲})(۱/۵\times ۱۰^{-۹})^۲+(۴۰\times ۱۰^۳)(۱/۵\times ۱۰^{-۹})\Rightarrow$$

$$x=۵/۰۱\times ۱۰^{-۵}\ \mathrm{m}$$

۵۳●●- میان دو صفحهٔ مسی موازی بزرگ که به فاصلهٔ $۵/۰\mathrm{cm}$ از هم قرار دارند، میدان الکتریکی یکنواختی، به ترتیبی که در شکل ۱۸-۵۵ نشان داده شده، برقرار است. الکترونی، درست در همان لحظه‌ای که یک پروتون از صفحهٔ مثبت رها می‌شود، از صفحهٔ منفی رها می‌گردد. با چشمپوشی از نیرویی که دو ذره بر یکدیگر وارد می‌کنند، فاصلهٔ آنها را از صفحهٔ مثبت، وقتی از کنار هم می‌گذرند، بیابید. (آیا از اینکه برای حل این مسئله نیازی به دانستن میدان الکتریکی ندارید، شگفت زده می‌شوید؟)



شکل ۱۸-۵۵ مسئلهٔ ۵۳

حل: فرض می‌کنیم نقطه A جایی باشد که الکترون و پروتون به هم می‌رسند.

$$F_p=F_e=qE=eE$$

$$F=ma\Rightarrow a_p=\frac{F_p}{m_p}=\frac{eE}{m_p}\ ,\quad a_e=\frac{F_e}{m_e}=\frac{eE}{m_e}$$

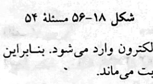
$$x_p=\frac{۱}{۲}a_pt^۲\ ,\quad x_e=\frac{۱}{۲}a_et^۲\ \Rightarrow$$

$$\frac{x_p}{x_e}=\frac{a_p}{a_e}\Rightarrow\frac{x_p}{۰/۰۵-x_p}=\frac{\frac{eE}{m_p}}{\frac{eE}{m_e}}=\frac{m_e}{m_p}=\frac{۹/۱\times ۱۰^{-۳۱}}{۱/۶۷\times ۱۰^{-۲۷}}\Rightarrow$$

$$(۱/۶۷\times ۱۰^{-۲۷})x_p=(۰/۰۵)(۹/۱\times ۱۰^{-۳۱})-(۹/۱\times ۱۰^{-۳۱})x_p\Rightarrow$$

$$x_p=x_A=۲/۷۲\times ۱۰^{-۵}\ \mathrm{m}$$

۵۴●●- در شکل ۱۸-۵۶، الکترونی با تندی اولیهٔ $v_۰=۲/۰۰\times ۱۰^۶\ \mathrm{m/s}$، در زاویهٔ $\theta_۰=۴۰/۰^\circ$ نسبت به محور x شلیک می‌شود و در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}=(۵/۰۰\mathrm{N/C})\hat{j}$ حرکت می‌کند. صفحه‌ای برای آشکار ساختن الکترون‌ها، موازی محور y در فاصلهٔ $x=۳/۰۰\mathrm{m}$ قرار داده شده است. وقتی الکترون به این صفحه برخورد کند، سرعت آن برحسب نمادگذاری بردار یکه چیست؟



شکل ۱۸-۵۶ مسئلهٔ ۵۴

حل: نیرو در راستای محور y به الکترون وارد می‌شود. بنابراین مولفه سرعت در امتداد محور x ثابت می‌ماند.

$$v_x=v_{x_۰}=V_۰\cos\theta_۰=(۲\times ۱۰^۶)(\cos ۴۰)=۱/۵۳\times ۱۰^۶\ \mathrm{m/s}$$

$$v_{y_۰}=v_۰\sin\theta_۰=(۲\times ۱۰^۶)(\sin ۴۰)=۱/۲۹\times ۱۰^۶\ \mathrm{m/s}$$

$$x=v_{x_۰}t\Rightarrow t=\frac{x}{V_{x_۰}}=\frac{۳}{(۱/۵۳\times ۱۰^۶)}=۱/۹۶\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{s}$$

$$ma=qE$$

$$v_y=a_yt+v_{y_۰}=\frac{-qE}{m}t+v_{y_۰}\Rightarrow$$

جهت نیروی وارد بر الکترون در خلاف جهت محور y است.

$$v_y=-\frac{(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})(۵)(۱/۹۶\times ۱۰^{-۶})}{(۹/۱\times ۱۰^{-۳۱})}+(۱/۲۹\times ۱۰^۶)$$

$$=-۴/۳۳\times ۱۰^۵\ \mathrm{m/s}$$

$$\vec{v}=(۱/۵۳\times ۱۰^۶\ \hat{i}-۴/۳۳\times ۱۰^۵\ \hat{j})\ \mathrm{m/s}$$

۵۵●●- ILW در ناحیه‌ای میان دو صفحهٔ باردار با علامت مخالف، یک میدان الکتریکی یکنواخت برقرار است. الکترونی از حالت سکون از سطح صفحهٔ باردار منفی رها می‌شود و با سطح صفحهٔ مقابل که به فاصلهٔ $۲/۰\mathrm{cm}$ از آن است پس از مدت زمان $۱/۵\times ۱۰^{-۸}\ \mathrm{s}$ برخورد می‌کند. (الف) تندی الکترون هنگام برخورد با صفحهٔ دوم چقدر است؟ (ب) بزرگی میدان الکتریکی $\vec{E}$ چیست؟

حل: (الف)

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲\Rightarrow a=\frac{۲x}{t^۲}=\frac{(۲)(۰/۰۲)}{(۱/۵\times ۱۰^{-۸})^۲}=۱/۷۸\times ۱۰^{۱۴}\ \mathrm{m/s^۲}$$

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=(۱/۷۸\times ۱۰^{۱۴})(۱/۵\times ۱۰^{-۸})+۰$$

$$=۲/۶۷\times ۱۰^۶\ \mathrm{m/s}$$

(ب) $$F=ma=qE\Rightarrow E=\frac{ma}{q}=\frac{(۹/۱\times ۱۰^{-۳۱})(۱/۷۸\times ۱۰^{۱۴})}{(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})}$$

$$=۱/۰۱\times ۱۰^۳\ \mathrm{N/C}$$

بخش ۱۸-۹ دو قطبی در میدان الکتریکی

●۵۶- یک دو قطبی الکتریکی از بارهای $+2e$ و $-2e$ تشکیل شده است که به فاصلهٔ ۰/۷۸nm از هم قرار دارند. این دو قطبی در میدانی الکتریکی به شدت $3/4\times10^{6}$ N/C واقع است. بزرگی گشتاور وارد بر دو قطبی را وقتی گشتاور دو قطبی (الف) موازی با، (ب) عمود بر ، و (پ) پاد موازی با میدان الکتریکی است پیدا کنید.

حل: $p=qd=(2)(1/6\times10^{-19})(0/78\times10^{-9})$

$=2/496\times10^{-28}\ \mathrm{C\cdot m}$

(الف) $\tau=pE\sin\theta\ ,\quad \theta=0\ \Rightarrow \tau=0$

(ب) $\theta=90^\circ \Rightarrow \tau=(2/496\times10^{-28})(3/4\times10^{6})(1)$

$=8/486\times10^{-22}\ \mathrm{N\cdot m}$

(پ) $\theta=180^\circ\ \Rightarrow\ \tau=0$

●۵۷- SSM یک دو قطبی الکتریکی از بارهایی به بزرگی ۱/۵۰nC که ۶/۲۰μm از هم فاصله دارند تشکیل شده است و در یک میدان الکتریکی به شدت ۱۱۰۰N/C قرار دارد. (الف) بزرگی گشتاور دو قطبی الکتریکی و (ب) اختلاف بین انرژی‌های پتانسیل مربوط به سمتگیری‌های موازی و پاد موازی دو قطبی با میدان $\vec{E}$ چقدر است؟

حل: (الف)

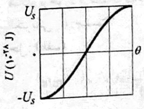
$p=qd=(1/5\times10^{-9})(6/2\times10^{-6})=9/3\times10^{-15}\ \mathrm{c\cdot m}$

(ب) $U=-\vec{p}\cdot\vec{E}$

$\Delta U=U_{180}-U_{0}=(-pE\cos180)-(-pE\cos0)\Rightarrow$

$\Delta U=2pE=(2)(9/3\times10^{-15})(1100)=2/046\times10^{-11}\ \mathrm{J}$

●●۵۸- یک دوقطبی الکتریکی معین در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ به بزرگی ۲۰N/C قرار دارد. شکل ۱۸-۵۷، انرژی پتانسیل U دو قطبی را برحسب زاویهٔ θ بین $\vec{E}$ و گشتاور دو قطبی $\vec{p}$ به دست می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $U_s=100\times10^{-28}$ J مشخص شده است. بزرگی $\vec{p}$ چقدر است؟



شکل ۱۸-۵۷ مسئلهٔ ۵۸

حل:

$U=-\vec{p}\cdot\vec{E}=-pE\cos\theta\Rightarrow U_m=pE\Rightarrow p=\dfrac{U_m}{E}\Rightarrow$

$p=\dfrac{100\times10^{-28}}{20}=5\times10^{-28}\ \mathrm{C\cdot m}$

●●۵۹- برای آنکه یک دو قطبی الکتریکی به اندازهٔ °۱۸۰ در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی $E=46/0$ N/C بچرخد، چه مقدار کار لازم است در صورتی که $p=3/02\times10^{-25}$ C·m و زاویهٔ اولیه °۶۴ باشد؟

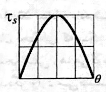
حل:

$W=U_{64+180}-U_{64}=-pE\cos(244)-(-pE\cos64)$

$=2pE\cos64=(2)(3/02\times10^{-25})(46)\cos64$

$=1/22\times10^{-23}\ \mathrm{J}$

●●۶۰- یک دو قطبی الکتریکی معین در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ به بزرگی ۴۰N/C قرار دارد. شکل ۱۸-۵۸، بزرگی گشتاور τ وارد بر این دو قطبی را برحسب زاویهٔ θ میان میدان $\vec{E}$ و گشتاور دو قطبی $\vec{p}$ نشان می‌دهد. مقیاس محور عمودی با $\tau_s=100\times10^{-28}$ N.m مشخص شده است بزرگی $\vec{p}$ چقدر است؟



شکل ۱۸-۵۸ مسئلهٔ ۶۰

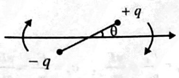
حل: زمانی τ بیشینه است که $\theta=90^\circ$ باشد.

$\tau=pE\sin\theta\Rightarrow$

$\tau_{max}=pE\Rightarrow p=\dfrac{\tau_{max}}{E}=\dfrac{100\times10^{-28}}{40}=2/5\times10^{-28}\ \mathrm{C\cdot m}$

●●۶۱- برای بسامد نوسان‌های با دامنهٔ کوچک یک دو قطبی الکتریکی، با گشتاور دو قطبی $\vec{p}$ و لختی دورانی I، حول مکان تعادل آن در یک میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی E، عبارتی پیدا کنید.

حل:



$\tau=pE\sin\theta$

جهت گشتاور به گونه‌ای است که می‌خواهد دو قطبی را به حالت تعادل در $\theta=0$ بازگرداند. برای زوایای کوچک θ داریم:

$\sin\theta\cong\theta\Rightarrow$

$\tau\cong-pE\theta\ ,\quad \tau=I\alpha=I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\ \Rightarrow$

علامت منفی برای τ نشان می‌دهد که جهت گشتاور همواره به طرف تعادل است مانند آونگ ساده.

$I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=-pE\theta\ \Rightarrow$

$I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+pE\theta=0\ \Rightarrow \dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\dfrac{p}{I}E\theta=0\ \Rightarrow$

$\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0\ \Rightarrow\ \omega=\sqrt{\dfrac{pE}{I}}$

$\omega=2\pi f\Rightarrow f=\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{pE}{I}}$

مسئله‌های اضافی

۶۲- (الف) بزرگی شتاب یک الکترون در میدان الکتریکی یکنواختی به بزرگی $1/40\times10^{6}$ N/C چقدر است؟ (ب) با شروع از حالت سکون، چقدر طول می‌کشد تا تندی الکترون به $\frac{1}{10}$ تندی نور برسد؟ (پ) در این بازهٔ زمانی، الکترون چقدر حرکت کرده است؟

حل: (الف) $eE=ma\Rightarrow a=\dfrac{eE}{m}=\dfrac{(1/6\times10^{-19})(1/4\times10^{6})}{(9/1\times10^{-31})}$

$=2/46\times10^{17}\ \mathrm{m/s^2}$

(ب) $V=at+V_0=at+0\Rightarrow t=\dfrac{V}{a}=\dfrac{(0/1)(3\times10^{8})}{2/46\times10^{17}}\Rightarrow$

$t=1/22\times10^{-10}\ \mathrm{s}$

(پ) $x=\dfrac{1}{2}at^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)(2/46\times10^{17})(1/22\times10^{-10})^2$

$=1/83\times10^{-3}\ \mathrm{m}$

۶۳- یک قطرهٔ آب کروی به قطر ۱/۲۰μm بر اثر میدان الکتریکی جوی رو به پایین به بزرگی $E=462$ N/C ، در هوای آرام معلق مانده است. (الف) بزرگی نیروی گرانشی وارد بر قطره چقدر است؟ قطره چه تعداد الکترون اضافی دارد؟

حل: (الف)

$mg=\rho\times\dfrac{4}{3}\pi R^3\times g=(1000)\left(\dfrac{4}{3}\right)\pi(0/6\times10^{-6})^3(9/8)\Rightarrow$

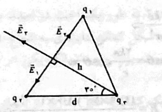
$w=mg=8/87\times10^{-15}\ \mathrm{N}$

(ب) $mg=qE\Rightarrow q=\dfrac{mg}{E}=\dfrac{8/87\times10^{-15}}{462}=1/92\times10^{-17}\ \mathrm{C}$

تعداد الکترونهای اضافی قطره: $N=\dfrac{q}{e}=\dfrac{1/92\times10^{-17}}{1/6\times10^{-19}}=120$

۶۴- سه ذره، هر یک با بار مثبت Q، تشکیل مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع d را می‌دهند. بزرگی میدان الکتریکی ناشی از ذره‌ها در وسط هر ضلع چقدر است؟

حل:

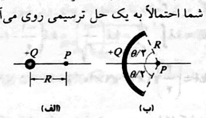


$\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.

$h=d\cos30=\dfrac{\sqrt{3}}{2}d\ \ ,\ \ E=\dfrac{kQ}{h^2}=\dfrac{Q}{(4\pi\varepsilon_0)\left(\dfrac{3}{4}d^2\right)}$

$=\dfrac{Q}{3\pi\varepsilon_0 d^2}$

۶۵- در شکل ۱۸-۵۹ الف، ذره‌ای با بار $+Q$ میدانی الکتریکی به بزرگی $E_{ذره}$ در نقطهٔ P در فاصلهٔ R از ذره ایجاد می‌کند. در شکل ۱۸-۵۹ ب، همان مقدار بار به طور یکنواخت روی کمانی دایره‌ای به شعاع R و زاویهٔ θ توزیع شده است. بار روی کمان، میدانی الکتریکی به بزرگی $E_{کمان}$ در مرکز خمیدگی P آن ایجاد می‌کند. به ازای چه مقداری از θ ، $E_{کمان}=0/500\,E_{ذره}$ است؟ (*راهنمایی*: شما احتمالاً به یک حل ترسیمی روی می‌آورید.)



شکل ۱۸-۵۹ مسئلهٔ ۶۵

حل:

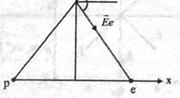
$E_{ذره}=\dfrac{kQ}{R^2}\quad ,\quad E_{کمان}=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}=\dfrac{2kQ}{R^2\theta}\sin\dfrac{\theta}{2}$

$\dfrac{2kQ}{R^2\theta}\sin\dfrac{\theta}{2}=(0/5)\left(\dfrac{kQ}{R^2}\right)\Rightarrow\dfrac{2}{\theta}\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$

$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\theta}{4}\ \Rightarrow\ \theta 3/81\mathrm{rad}\ \Rightarrow\ \theta=218/4^\circ$

۶۶- یک پروتون و یک الکترون دو گوشهٔ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $2/0\times10^{-6}$m را تشکیل داده‌اند. بزرگی میدان الکتریکی خالص ناشی از این دو ذره در گوشهٔ سوم چقدر است؟

حل:



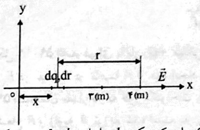
$$E_p = E_e = \frac{ke}{r^۲} \Rightarrow$$

$$E = ۲E_p \cos\theta = \frac{۲ke}{r^۲}\cos\theta \Rightarrow$$

$$E = \frac{(۲)(۹\times ۱۰^۹)(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})}{(۲\times ۱۰^{-۶})^۲}\cos ۶۰ = ۳۶۰\ \text{N/C}$$

۶۷- بار (با چگالی خطی یکنواخت ۹/۰ nC/m) روی تاری که بر محور x از $x=۰$ تا $x=۳/۰\text{m}$ امتداد یافته است، قرار دارد. بزرگی میدان الکتریکی را در $x=۴/۰\text{m}$ روی محور x تعیین کنید.

حل:



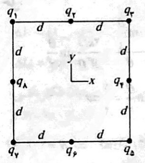
تار را به تکه‌های کوچک dr با بار dq تقسیم می‌کنیم.

$$dE = \frac{kdq}{r^۲} = \frac{k\lambda dr}{r^۲}$$

$$E = \int dE = k\lambda \int_۱^۴ \frac{dr}{r^۲} = k\lambda\left(\frac{-۱}{r}\right)_۱^۴ = k\lambda\left(\frac{-۱}{۴} - (-۱)\right) \Rightarrow$$

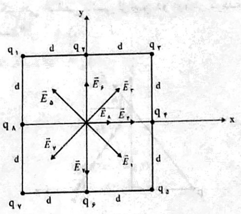
$$E = \frac{۳}{۴}k\lambda = \left(\frac{۳}{۴}\right)(۹\times ۱۰^۹)(۹\times ۱۰^{-۹}) = ۶۰/۷۵\ \text{N/C}$$

۶۸- در شکل ۱۸-۶۰ ، هشت ذره مربعی را تشکیل داده‌اند که در آن $d=۲/۰\text{cm}$ است. بارها عبارت‌اند از: $q_۱=+۳e$ ، $q_۲=+e$ ، $q_۳=-۵e$ ، $q_۴=-۲e$ ، $q_۵=+۳e$ ، $q_۶=+e$ ، $q_۷=-۵e$ ، و $q_۸=+e$. برحسب نمادگذاری برداری که، میدان الکتریکی خالص ناشی از ذره‌ها در مرکز مربع چیست؟



شکل ۱۸-۶۰ مسئلهٔ ۶۸

حل:



$$E_۱ - E_۵ = \frac{k(۳e)}{(\sqrt{۲}d)^۲} \quad , \quad E_۲ = E_۶ = \frac{ke}{d^۲} \quad ,$$

$$E_۳ - E_۷ = \frac{k(۵e)}{(\sqrt{۲}d)^۲} \quad , \quad E_۴ = \frac{k(۲e)}{d^۲} \quad , E_۸ = \frac{ke}{d^۲}$$

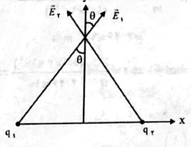
میدان ناشی از همه‌ی بارها یکدیگر را خنثی می‌کنند،به جز دوبار $q_۴$ و $q_۸$.

$$E_{\text{total}} = E_۴ + E_۸ = \frac{۲ke}{d^۲} + \frac{ke}{d^۲} = \frac{۳ke}{d^۲} \Rightarrow$$

$$\vec{E}_{\text{total}} = \frac{(۳)(۹\times ۱۰^۹)(۱/۶\times ۱۰^{-۱۹})}{(۰/۰۲)^۲}\hat{i} = ۱/۰۸\times ۱۰^{-۵}\ \hat{i}\ \text{N/C}$$

۶۹- دو ذره، هر یک با باری به بزرگی ۱۲ nC در دو گوشهٔ مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۲/۰m قرار دارند. مطلوب است بزرگی میدان الکتریکی در صورتی که (الف) هر دو بار مثبت باشند و (ب) یکی مثبت و دیگری منفی باشد.

حل: (الف)



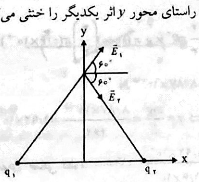
به دلیل تقارن، میدان فقط در راستای محور y است و مؤلفه‌ها در راستای محور x اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.

$$E_{\text{total}} = ۲Ey = ۲E_۱\cos\theta = ۲\frac{kq}{r^۲}\cos\theta$$

$$= \frac{(۲)(۹\times ۱۰^۹)(۱۲\times ۱۰^{-۹})}{۴}\times \cos ۳۰ \Rightarrow$$

$$E_{\text{total}} = ۴۶/۷۷\ \text{N/C}$$

(ب) به دلیل تقارن میدان فقط در راستای محور x است و مولفه‌ها در راستای محور y اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.



$$E_{\text{total}} = ۲E_x = ۲E_۱\cos\theta = \frac{۲kq}{r^۲}\cos\theta$$

$$= \frac{(۲)(۹\times ۱۰^۹)(۱۲\times ۱۰^{-۹})}{۴}\times \cos ۶۰ \Rightarrow$$

$$E_{\text{total}} = ۲۷\ \text{N/C}$$

۷۰- میلیکان در یکی از آزمایش‌های خود، بارهای اندازه‌گیری شدهٔ آمده در جدول را در زمان‌های مختلف روی یک قطرهٔ تنها مشاهده کرد

$۱۹/۷۱\times ۱۰^{-۱۹}$C	$۱۳/۱۳\times ۱۰^{-۱۹}$C	$۶/۵۶۳\times ۱۰^{-۱۹}$C
$۲۲/۸۹\times ۱۰^{-۱۹}$C	$۱۶/۴۸\times ۱۰^{-۱۹}$C	$۸/۲۰۴\times ۱۰^{-۱۹}$C
$۲۶/۱۳\times ۱۰^{-۱۹}$C	$۱۸/۰۸\times ۱۰^{-۱۹}$C	$۱۱/۵۰\times ۱۰^{-۱۹}$C

براساس این داده‌ها، مقدار بار بنیادی e چقدر است؟

حل: ابتدا یک مقدار تقریبی برای e با بدست آوردن اختلاف بین مقدارهای داده شده می‌یابیم. کمترین اختلاف میان مقادیر داده‌های پنجم و ششم است.

$$۱۸/۰۸\times ۱۰^{-۱۹} - ۱۶/۴۸\times ۱۰^{-۱۹} = ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}\ \text{C}$$

که آن را e_T تقریبی می‌نامیم.

ثابت‌های n را با استفاده از این مقدار تقریبی بدست می‌آوریم.

داده ۱: $\frac{۶/۵۶۳\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T} = ۴/۱ \Rightarrow n_۱ = ۴$

داده ۲: $\frac{۸/۲۰۴\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T} = ۵/۱۳ \Rightarrow n_۲ = ۵$

داده ۳: $\frac{۱۱/۵\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T} = ۷/۱۹ \Rightarrow n_۳ = ۷$

داده ۴: $\frac{۱۳/۱۳\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T} = ۸/۲۱ \Rightarrow n_۴ = ۸$

داده ۵: $\frac{۱۶/۴۸\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T} = ۱۰/۳ \Rightarrow n_۱ = ۱۰$

داده ۶: $\frac{۱۸/۰۸\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T} = ۱۱/۳ \Rightarrow n_۶ = ۱۱$

داده ۷: $\frac{۱۹/۷۱\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T} = ۱۲/۳۲ \Rightarrow n_۷ = ۱۲$

داده ۸: $\frac{۲۲/۸۹\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T} = ۱۴/۳۱ \Rightarrow n_۸ = ۱۴$

داده ۹: $\frac{۲۶/۱۳\times ۱۰^{-۱۹}}{e_T} = ۱۶/۳۳ \Rightarrow n_۹ = ۱۶$

سپس یک مجموعه جدید از داده‌ها را با تقسیم مقادیر داده شده بر مقادیر دقیق مربوط به آنها (یعنی n_i به ازای $i=۱,۲,۳,...$) بنا می‌کنیم.

$$e_۱, e_۲, e_۳, ... = \frac{۶/۵۶۳\times ۱۰^{-۱۹}}{n_۱}, \frac{۸/۲۰۴\times ۱۰^{-۱۹}}{n_۲}, \frac{۱۱/۵\times ۱۰^{-۱۹}}{n_۳}, ...$$

که مقادیر زیر را بدست می‌دهد:

$$(۱/۶۴۰\times ۱۰^{-۱۹}, ۱/۶۴۰۸\times ۱۰^{-۱۹}, ۱/۶۴۲۸۶\times ۱۰^{-۱۹}, ...)$$

و آن را به عنوان مجموعه داده‌های جدید درنظر می‌گیریم.

حال با گرفتن میانگین و انحراف معیار به مقدار زیر می‌رسیم:

$$e = e_{\text{ave}} \pm \Delta e = (۱/۶۴۱ \pm ۰/۰۰۴)\times ۱۰^{-۱۹}\ \text{C}$$

حد پایین این رابطه به مقدار $۱/۶۳۷\times ۱۰^{-۱۹}$ (C) می‌انجامد که هنوز در حدود ٪۲ بیشتر از مقدار پذیرفته شده برای e است.

۷۱- بار ۲۰nC به طور یکنواخت در امتداد میلهٔ راستی به طول ۴/۰m که به شکل کمانی دایره‌ای به شعاع ۲/۰m خم شده، توزیع شده است. بزرگی میدان الکتریکی در مرکز انحنای کمان چقدر است؟

حل: میدان یک کمان به دلیل تقارن در امتداد محور آن می‌باشد و از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E = \frac{q}{۲\pi\varepsilon_۰ R^۲}\frac{\sin\frac{\varphi}{۲}}{\varphi} = \frac{۲kq}{R^۲}\frac{\sin\frac{\varphi}{۲}}{\varphi}$$

$$l = R\theta \Rightarrow \theta = \frac{l}{R} = \frac{۴}{۲} = ۲(rad) \Rightarrow \theta = ۱۱۴/۶°$$

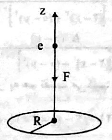
$$E = \frac{(۲)(۹\times ۱۰^۹)(۲۰\times ۱۰^{-۹})}{(۲)^۲}\frac{\sin\left(\frac{۱۱۴/۶}{۲}\right)}{۲} = ۳۷/۸۷\ \text{N/C}$$

۷۲- الکترونی در امتداد محور عمودی مرکزی یک حلقهٔ باردار به شعاع R در شکل ۱۸-۱۰ با $z << R$ مقید شده است. نشان دهید که نیروی الکتروستاتیکی وارد بر الکترون می‌تواند باعث نوسان آن در مرکز حلقه با بسامد زاویه‌ای زیر شود

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{۴\pi\varepsilon_۰ mR^۳}}$$

که در آن q بار حلقه و m جرم الکترون است.

حل:



میدان ناشی از یک حلقه به شعاع R که بار q بطور یکنواخت روی آن توزیع شده است از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E = \frac{qz}{۴\pi\varepsilon_۰(z^۲+R^۲)^{۳/۲}}$$

$$z << R \Rightarrow E = \frac{qz}{۴\pi\varepsilon_۰ R^۳} \Rightarrow$$

$$F = qE = -eE = \frac{-eqz}{۴\pi\varepsilon_۰ R^۳} \Rightarrow m\frac{d^۲z}{dz^۲} + \frac{eq}{۴\pi\varepsilon_۰ R^۳}z = ۰ \Rightarrow$$

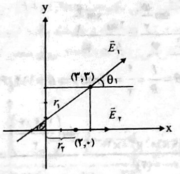
$$m\frac{d^2z}{dt^۲} + kz = ۰ \quad , \quad k = \frac{eq}{۴\pi\varepsilon_۰ R^۳}$$

$$\frac{d^۲z}{dt^۲} + \frac{k}{m}z = ۰ \quad \Rightarrow \quad \frac{d^۲z}{dt^۲} + \omega^۲ z = ۰ \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{eq}{۴\pi\varepsilon_۰ mR^۳}}$$

۷۳- SSM میدان الکتریکی در صفحهٔ xy ناشی از یک ذرهٔ باردار مثبت، در نقطهٔ $(3/0, 3/0)\mathrm{cm}$ برابر با $7/2(4/0\hat{i}+3/0\hat{j})\,\mathrm{N/C}$ و در نقطهٔ $(2/0, 0)\mathrm{cm}$ برابر $100\hat{i}\,\mathrm{N/C}$ است. (الف) مؤلفهٔ x و (ب) مؤلفهٔ y ذره چیست؟ (پ) بار ذره چقدر است؟

حل:



(الف) و (ب)

$$E_{1x}=E_1\cos\theta_1=\frac{kQ}{r_1^2}\frac{3-x}{r_1}=\frac{kQ(3-x)}{\left[(3-x)^2+(3-y)^2\right]^{3/2}}=28/8 \quad (1)$$

$$E_{1y}=E_1\sin\theta_1=\frac{kQ}{r_1^2}\frac{3-y}{r_1}=\frac{kQ(3-y)}{\left[(3-x)^2+(3-y)^2\right]^{3/2}}=21/6 \quad (2)$$

$$E_{2x}=E_2\cos\theta_2=\frac{kQ(2-x)}{\left[(2-x)^2+(0-y)^2\right]^{3/2}}=100 \quad (3)$$

$$E_{2y}=E_2\sin\theta_2=\frac{kQ(0-y)}{\left[(2-x)^2+(0-y)^2\right]^{3/2}}=0 \Rightarrow y=0 \quad (4)$$

دو رابطه (۱) و (۲) را به هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{3-x}{3-y}=\frac{28/8}{21/6}\Rightarrow 21/6(3-x)=3\times 28/8\Rightarrow x=-1\mathrm{cm}$$

(پ)

$$(1)\Rightarrow\frac{(9\times10^{9})(4\times10^{-2})Q}{\left[(0/04)^2+(0/03)^2\right]^{3/2}}=28/8$$

$$\Rightarrow Q=1\times10^{-11}\,\mathrm{C}$$

۷۴- (الف) قرص شکل ۱۸-۱۳ چه بار کلی (اضافی) q باید داشته باشد تا میدان الکتریکی E روی سطح قرص در مرکز آن دارای بزرگی $3/0\times10^{6}\,\mathrm{N/C}$ باشد، میدانی که باعث فروریزش الکتریکی هوا و ایجاد جرقه‌ها می‌شود؟ شعاع قرص را $2/5\mathrm{cm}$ در نظر بگیرید و از مورد مربوط به هوا در جدول ۱۸-۱ استفاده کنید. (ب) فرض کنید هر اتم سطحی دارای سطح مقطع مؤثر $0/015\mathrm{nm}^2$ باشد. برای ایجاد سطح قرص به چند اتم نیاز است؟ (پ) بار محاسبه شده در (الف) ناشی از آن اتم‌های سطحی است که یک الکترون اضافی دارند. چه کسری از این اتم‌ها باید این چنین باردار شده باشند؟

حل: (الف)

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

میدان قرصی به شعاع R که بار q بطور یکنواخت روی آن توزیع شده است در نقطه‌ای روی محور آن از رابطه بالا بدست می‌آید.

$$z=0\Rightarrow E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow\sigma=2\varepsilon_0E=(2)(8/85\times10^{-12})(3\times10^{6})$$

$$\Rightarrow\sigma=5/31\times10^{-5}\,C/m^2 \quad , \quad \sigma=\frac{q}{s}$$

$$\Rightarrow\sigma=\frac{q}{\pi R^2}\Rightarrow q=\pi R^2\sigma=\pi(2/5\times10^{-2})^2(5/31\times10^{-5})$$

$$=1/04\times10^{-7}\,\mathrm{C}$$

(ب)

$$N=\frac{s}{s_{\text{اتم}}}=\frac{\pi R^2}{s_{\text{اتم}}}=\frac{\pi(2/5\times10^{-2})^2}{(0/015\times10^{-18})}=1/31\times10^{17}\ (\mathrm{Atom})$$

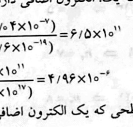
(پ) تعداد اتم‌هایی که یک: الکترون اضافی دارند:

$$N'=\frac{q}{e}=\frac{(1/04\times10^{-7})}{(1/6\times10^{-19})}=6/5\times10^{11}$$

$$\frac{N'}{N}=\frac{6/5\times10^{11}}{(1/31\times10^{17})}=4/96\times10^{-6}$$

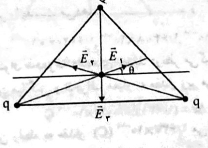
کسری از اتم‌های سطحی که یک الکترون اضافی دارند بدست آمد.

۷۵- در شکل ۱۸-۶۱، ذرهٔ ۱ (با بار $+1/00\mu\mathrm{C}$)، ذرهٔ ۲ (با بار $+1/00\mu\mathrm{C}$)، و ذرهٔ ۳ (با بار Q) یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را تشکیل می‌دهند. به ازای چه مقداری از Q (هم از لحاظ علامت و هم از لحاظ بزرگی) میدان الکتریکی ناشی از این ذره‌ها، در مرکز مثلث برابر صفر است؟



شکل ۱۸-۶۱ مسئله‌های ۷۵ و ۸۶

حل:



بنابر تقارن برای اینکه میدان الکتریکی در مرکز مثلث صفر باشد باید بار Q مثبت باشد.

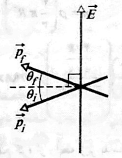
$$E_1=E_2=\frac{kq}{r^2}$$

$$E_x=0 \Rightarrow E_1\cos\theta=E_2\cos\theta$$

$$E_y=0\Rightarrow E_1\sin\theta+E_2\sin\theta=E_3\Rightarrow E_3=2E_1\sin\theta$$

$$\Rightarrow\frac{kQ}{r^2}=2\frac{kq}{r^2}\sin30\Rightarrow Q=2q\sin30\Rightarrow Q=q=1\,\mu C$$

۷۶- در شکل ۱۸-۶۲، یک دو قطبی الکتریکی از سمت‌گیری اولیهٔ i $(\theta_i=20/0^\circ)$ تا سمت‌گیری نهایی f $(\theta_f=20/0^\circ)$ در میدان الکتریکی یکنواخت خارجی $\vec{E}$ جابه‌جا می‌شود. گشتاور دو قطبی الکتریکی $1/60\times10^{-27}\,\mathrm{C.m}$، و بزرگی میدان $3/00\times10^{6}\,\mathrm{N/C}$ است. تغییر در انرژی پتانسیل دو قطبی چقدر است؟



شکل ۱۸-۶۲ مسئلهٔ ۷۶

حل:

$$V=-\vec{p}\cdot\vec{E}=-pE\cos\theta \Rightarrow$$

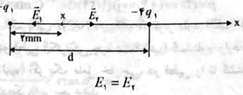
$$\Delta V=-pE\cos\theta_f-(-pE\cos\theta_i)=-pE(\cos\theta_f-\cos\theta_i) \Rightarrow$$

$$\Delta V=-(1/6\times10^{-27})(3\times10^{6})(\cos(90-20)-\cos(90+20))\Rightarrow$$

$$\Delta V=-(1/6\times10^{-27})(3\times10^{6})(2\sin20)=-3/28\times10^{-21}\,\mathrm{J}$$

۷۷- ذره‌ای با بار $-q_1$ در مبداء محور x قرار دارد. (الف) ذره‌ای با بار $-4q_1$ در چه مکانی از محور باید قرار گیرد تا میدان الکتریکی خالص در $x=2/0\mathrm{mm}$ واقع بر آن محور برابر صفر باشد؟ اگر ذره‌ای با بار $+4q_1$ در آن مکان قرار گیرد، جهت میدان الکتریکی خالص (نسبت به جهت محور x) چه خواهد بود؟

حل: (الف) چون بار هر دو ذره منفی نقطه مورد نظر بین دوبار قرار دارد.

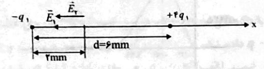


$$E_1=E_2$$

$$\frac{kq_1}{x^2}=\frac{k(4q_1)}{(d-x)^2}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{2}{d-x}\Rightarrow 2x=d-x\Rightarrow$$

$$3x=d \Rightarrow d=6\ \mathrm{mm}$$

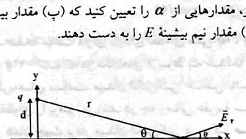
(ب)



در این حالت که ذره دوم بار مثبت دارد بردارهای میدان الکتریکی ایجاد شده توسط هر دو بار در $x=2\mathrm{mm}$، در جهت $-x$ قرار دارند. بنابراین جهت میدان الکتریکی خالص در خلاف جهت محور x است.

۷۸- دو ذره، هر یک با بار مثبت q، روی محور y یکی در $y=d$ و دیگری در $y=-d$ قرار دارند. (الف) عبارتی بنویسید که بزرگی E میدان الکتریکی خالص را در نقطه‌هایی روی محور x که با $x=\alpha d$ داده می‌شوند، به دست دهد. (ب) برای گسترهٔ $0<\alpha<4$، E را برحسب α رسم کنید. از روی این نمودار، مقدارهایی از α را تعیین کنید که (پ) مقدار بیشینهٔ E و (ت) مقدار نیم بیشینهٔ E را به دست دهند.

حل:



(الف) به دلیل تقارن میدان نهایی فقط در جهت محور x ها می‌باشد.

$$E_1=E_2=\frac{kq}{r^2}\ ,\ E_{\text{total}}=2E_1\cos\theta=\frac{2kq}{r^2}\frac{x}{r}=\frac{2kqQ}{r^3}\Rightarrow$$

$$E_{\text{total}}=\frac{2kq\alpha d}{\left[(\alpha d)^2+d^2\right]^{3/2}}=\frac{2kq\alpha d}{d^3(1+\alpha^2)^{3/2}}=\frac{2kq\alpha}{d^2(1+\alpha^2)^{3/2}}$$

(ب) و (پ)

$$E=\frac{2kq}{d^2}\left[\alpha(1+\alpha^2)^{-3/2}\right]\Rightarrow$$

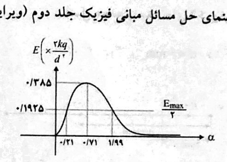
$$\frac{dE}{d\alpha}=\frac{2kq}{d^2}\left[(1+\alpha^2)^{-3/2}+\alpha\left(-\frac{3}{2}\right)(2\alpha)(1+\alpha^2)^{-5/2}\right]\Rightarrow$$

$$\frac{dE}{d\alpha}=\frac{2kq}{d^2}\left(\frac{1+\alpha^2-3\alpha^2}{(1+\alpha^2)^{5/2}}\right)=0\Rightarrow$$

$$1+\alpha^2-3\alpha^2=0\Rightarrow1=2\alpha^2\Rightarrow\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}=0/71$$

$$E_{\max}=\frac{2kq}{d^2}\frac{(0/71)}{\left[1+(0/71)^2\right]^{3/2}}=0/385\frac{2kq}{d^2}$$

α	۰	۰/۷۱	۱	۲	۳	۴
$E\left(\times\frac{2kq}{d^2}\right)$	۰	۰/۳۸۵	۰/۳۵	۰/۱۷۹	۰/۰۹۵	۰/۰۵۷



(ت) $$E=\frac{E_{max}}{۲}\Rightarrow\frac{۲kq\alpha}{d^۲(۱+\alpha^۲)^{۳/۲}}=\left(\frac{۱}{۲}\right)(۰/۳۸۵)\left(\frac{۲kq}{d^۲}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha}{(۱+\alpha^۲)^{۳/۲}}=۰/۱۹۲۵\Rightarrow\frac{\alpha^۲}{۱+\alpha^۶+۳\alpha^۲+۳\alpha^۴}=۰/۰۳۷$$

$$\Rightarrow ۰/۰۳۷\alpha^۶+۳\times۰/۰۳۷\alpha^۴+(۳\times۰/۰۳۷-۱)\alpha^۲+۰/۰۳۷=۰$$

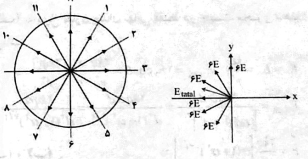
$$\Rightarrow\alpha^۶+۳\alpha^۴-۲۴/۰۲۷\alpha^۲+۱=۰$$

دو جواب قابل قبول برای این معادله که در فاصله $۴>\alpha>۰$ قرار دارند، جواب‌های زیر می‌باشند:

$$\alpha=۰/۲۱\ ,\ \alpha=۱/۹۹$$

۷۹- یک صفحهٔ ساعت دارای بارهای نقطه‌ای منفی $-q$ ، $-۲q$ ، $-۳q$ ، ...، $-۱۲q$ است که در مکان‌های مربوط به عددها قرار دارند. عقربه‌های ساعت، میدان الکتریکی خالص ناشی از بارهای نقطه‌ای را برهم نمی‌زنند. در چه زمانی عقربهٔ ساعت شمار در همان جهت بردار میدان الکتریکی در مرکز صفحهٔ ساعت است؟

حل:



$$E_x=-۶E-۲(۶E)\cos۳۰-۲(۶E)\cos۶۰=-۲۲/۳۹E$$

$$E_y=۶E+۶E\sin۶۰+۶E\sin۳۰+۰-۶E\sin۳۰-۶E\sin۶۰=۶E$$

$$tg\varphi=\frac{E_y}{E_x}=\frac{۶E}{-۲۲/۳۹E}=-۴/۶۸\times۱۰^{-۳}\Rightarrow\varphi=۱۶۵^\circ$$

با توجه به اینکه زاویه بین هر دو شماره متوالی ۳۰° است عقربه ساعت شمار در وسط اعداد ۹ و ۱۰ قرار دارد. یعنی در ساعت $۹:۳۰'$ عقربه ساعت شمار هم جهت با میدان خواهد بود.

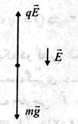
۸۰- گشتاور دو قطبی الکتریکی یک الکترون و یک پروتون را که به فاصلهٔ $۴/۳۰\text{nm}$ از هم قرار دارند محاسبه کنید.

حل:

$$p=qd=(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۴/۳\times۱۰^{-۹})=۶/۸۸\times۱۰^{-۲۸}\ \text{C}\cdot\text{m}$$

۸۱- در جو نزدیک سطح زمین، بزرگی متوسط میدان الکتریکی $\vec{E}$ حدود ۱۵۰N/C رو به پایین است. می‌خواهیم یک کرهٔ گوگردی به وزن $۴/۴\text{N}$ را با باردار کردن آن، در این میدان «شناور» کنیم. (الف) از چه باری (هم از لحاظ علامت و هم از لحاظ بزرگی) باید استفاده شود؟ (ب) چرا این آزمایش نشدنی است؟

حل: (الف) $mg=qE\Rightarrow q=\frac{mg}{E}=\frac{۴/۴}{۱۵۰}=۰/۰۲۹\text{C}$



چون میدان روبه پایین است باید بار کره منفی باشد تا نیروی وارد بر آن روبه بالا باشد.

(ب) $$\rho=۲۱۵۰\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^۳}\right)\quad,\quad m=\rho\left(\frac{۴}{۳}\pi R^۳\right)\Rightarrow$$

$$R^۳=\frac{\frac{mg}{g}}{\frac{۴}{۳}\pi f}=\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{\frac{۴/۴}{۹/۸}}{\pi\times۲۱۵۰}\right)=۴/۹۸\times۱۰^{-۵}\Rightarrow$$

$$R=۰/۰۳۷\text{m}$$

بنابراین میدان در سطح کره از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E=\frac{kq}{R^۲}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۰/۰۲۹)}{(۰/۰۳۷)^۲}=۱/۹۱\times۱۰^{۱۱}\ \text{N/C}$$

این میدان بسیار بزرگتر از میدان شکست در هوا می‌باشد.

۸۲- روی یک میلهٔ دایره‌ای به شعاع انحنای $R=۹/۰۰\text{cm}$ که در زاویهٔ $\theta=۲/۴۰\text{rad}$ محدود است، بار مثبت $Q=۶/۲۵\text{pC}$ به طور یکنواخت توزیع شده است. بزرگی میدان الکتریکی که Q در مرکز انحنا ایجاد می‌کند چقدر است؟

حل: در مساله ۲۵ میدان الکتریکی کمان را بدست آوردیم.

$$E=\frac{q}{۲\pi\varepsilon_0R^۲\theta}\sin\frac{\theta}{۲}=\frac{۲kq}{R^۲\theta}\sin\frac{\theta}{۲}$$

$$E=\frac{(۲)(۹\times۱۰^۹)(۶/۲۵\times۱۰^{-۱۲})}{(۰/۰۹)^۲\times۲/۴}\sin\left(\frac{۱۳۷/۵۱}{۲}\right)$$

$$=۵/۳۹\ \text{N/C}$$

۸۳- SSM یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی

$$\vec{p}=(۳/۰۰\hat{i}+۴/۰۰\hat{j})(۱/۲۴\times۱۰^{-۳۰}\ \text{C.m})$$

در میدان الکتریکی $\vec{E}=(۴۰۰۰\ \text{N/C})\hat{i}$ قرار دارد. (الف) انرژی پتانسیل دو قطبی الکتریکی چیست؟ (ب) گشتاور وارد بر آن چیست؟ (پ) اگر یک عامل خارجی، دو قطبی را تا گشتاور دو قطبی الکتریکی زیر بچرخاند

$$\vec{p}=(-۴/۰۰\hat{i}+۳/۰۰\hat{j})(۱/۲۴\times۱۰^{-۳۰}\ \text{C.m})$$

چقدر کار توسط آن عامل خارجی صورت گرفته است؟

حل: (الف)

$$U=-\vec{p}\cdot\vec{E}=-(۱/۲۴\times۱۰^{-۳۰})(۳\hat{i}+۴\hat{j})\cdot(۴۰۰۰\hat{i})\Rightarrow$$

$$U=-۱/۴۸۸\times۱۰^{-۲۶}\ \text{J}$$

(ب) $$\vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{E}=(۱/۲۴\times۱۰^{-۳۰})\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\۳&۴&۰\\۴۰۰۰&۰&۰\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\tau=-۱/۹۸۴\times۱۰^{-۲۶}\ \text{J}$$

(پ)

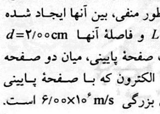
$$U_f=-\vec{p}_f\cdot\vec{E}=-(۱/۲۴\times۱۰^{-۳۰})(-۴\hat{j}+۳\hat{j})\cdot(۴۰۰۰\hat{i})\Rightarrow$$

$$U_f=۱/۹۸۴\times۱۰^{-۲۶}\ \text{J}$$

$$W=\Delta U=U_f-U_i=۱/۹۸۴\times۱۰^{-۲۶}-(-۱/۴۸۸\times۱۰^{-۲۶})\Rightarrow$$

$$W=۳/۴۷۲\times۱۰^{-۲۶}\ \text{J}$$

۸۴- در شکل ۱۸-۶۳، میدان الکتریکی رو به بالای یکنواخت $\vec{E}$ به بزرگی $۲/۰۰\times۱۰^۳\ \text{N/C}$ با باردارکردن دو صفحهٔ افقی، پایینی به طور مثبت و بالایی به طور منفی، بین آنها ایجاد شده است. طول صفحه‌ها $L=۱۰/۰\text{cm}$ و فاصلهٔ آنها $d=۲/۰۰\text{cm}$ است. سپس الکترونی از لبهٔ چپ صفحهٔ پایینی، میان دو صفحه پرتاب می‌شود. سرعت اولیه $\vec{v}_0$ الکترون که با صفحهٔ پایینی زاویهٔ $\theta=۴۵/۰^\circ$ می‌سازد دارای بزرگی $۶/۰۰\times۱۰^۶\ \text{m/s}$ است. (الف) آیا الکترون به یکی از صفحه‌ها برخورد می‌کند؟ (ب) اگربلی، با کدامیک از صفحه‌ها و در چه فاصلهٔ افقی از لبهٔ چپ؟



شکل ۱۸-۶۳ مسئلهٔ ۸۴

حل: (الف) $F=ma=eE\Rightarrow$

$$a=\frac{eE}{m}=\frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})(۲\times۱۰^۳)}{(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})}\Rightarrow$$

$$a=۳/۵۲\times۱۰^{۱۴}\ (\text{m/s}^۲)$$

حرکت الکترون مانند حرکت پرتابه خواهد بود بنابراین نقطه اوج آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$y=\frac{V_0^۲\sin^۲\theta_0}{۲a}=\frac{(۶\times۱۰^۶)^۲(\sin۴۵)^۲}{(۲)(۳/۵۲\times۱۰^{۱۴})}=۰/۰۲۵۶\ \text{m}$$

$$=۲/۵۶\text{cm}$$

(ب) پس الکترون با صفحه بالایی برخورد می‌کند. $y>d$

برای یافتن محل برخورد معادله مسیر پرتابه را می‌نویسیم:

$$y=\frac{-ax^۲}{۲V_0^۲\cos^۲\theta_0}+x\tan\theta_0\Rightarrow$$

$$۰/۰۲۵۶=-\frac{(۳/۵۲\times۱۰^{۱۴})x^۲}{(۲)(۶\times۱۰^۶)^۲(\cos۴۵)^۲}+x\tan۴۵$$

$$۹/۷۸x^۲-x+۰/۰۲۵۶=۰\Rightarrow x=۰/۰۲۷۱\ \text{m}$$

$$=۲/۷۱\ \text{cm}<L$$

۸۵- با داده‌های مسئلهٔ ۷۰ ، فرض کنید که بار q روی قطره با $q=ne$ داده شده است که در آن n یک عدد درست و e بار بنیادی است. (الف) n را برای هر مقدار داده شدهٔ q بیابید. (ب) یک برازش *بازگشتی خطی* از مقدارهای q برحسب مقدارهای n انجام دهید و سپس با استفاده از آن برازش، e را پیدا کنید.

حل: در مساله ۶۲ نیز از همین روش استفاده کردیم.

اختلاف بین مقادیر بارهای مختلف روی قطره را بدست می‌آوریم.

$$۱/۶۴\times۱۰^{-۱۹}\text{C}\ ,\ ۳/۳۵\times۱۰^{-۱۹}\text{C}\ ,\ ۳/۸۸\times۱۰^{-۱۹}\text{C}$$
$$۴/۹۳\times۱۰^{-۱۹}\text{C}\ ,\ ۴/۹۵\times۱۰^{-۱۹}\text{C}\ ,\ ۶/۴۲\times۱۰^{-۱۹}\text{C}$$
$$۳/۲۹۶\times۱۰^{-۱۹}\text{C}\ ,\ ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\text{C}\ ,\ ۳/۲۴\times۱۰^{-۱۹}\text{C}$$

کمترین بار یعنی $۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\text{C}$ را به عنوان بار پایه درنظر می‌گیریم.

مقدار n برای هر یک از بارها به ترتیب به صورت زیر خواهد بود (که در آن به دلیل خطای اندازه‌گیری در محاسبه بار، مقدار اعشار برای n حذف شده است):

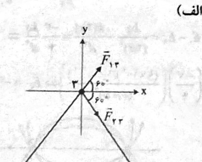
۱	۲	۲
۳	۳	۴
۲	۱	۲

با روش (حداقل میانگین مربع) خطی به مقدار زیر برای بار e می‌رسیم:

$$e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ \text{C}$$

۸۶- در شکل ۱۸-۶۱، ذرهٔ ۱ (با بار $+۲/۰۰\text{pC}$)، ذرهٔ ۲ (با بار $-۲/۰۰\text{pC}$)، و ذرهٔ ۳ (با بار $+۵/۰۰\text{pC}$) تشکیل مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $a=۹/۵۰\text{cm}$ را می‌دهند. (الف) نسبت به جهت مثبت محور x ، جهت نیروی $\vec{F}_۳$ وارد بر ذرهٔ ۳ ناشی از دو ذرهٔ دیگر را با رسم خط‌های میدان الکتریکی آن دو ذره، تعیین کنید. (ب) بزرگی نیروی $\vec{F}_۳$ را محاسبه کنید.

حل: (الف)



(ب)

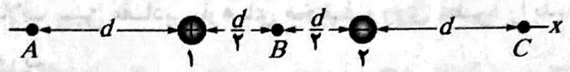
$$F_{۱۳}=F_{۲۳}=\frac{kq_۱q_۳}{a^۲}=\frac{(۹\times۱۰^۹)(۲\times۱۰^{-۱۲})(۵\times۱۰^{-۱۲})}{(۹/۵\times۱۰^{-۲})^۲}$$

$$=۹/۹۷\times۱۰^{-۱۲}\ \text{N}$$

$$F_2 = 2F_{13}\cos 60 = (2)(9/97\times10^{-12})\left(\frac{1}{2}\right)$$

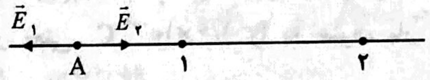
$$= 9/97\times10^{-12}\ \text{N}$$

۸۷- در شکل ۱۸-۶۴، ذرهٔ ۱ با بار $q_1=1/00\,\text{pC}$ و ذرهٔ ۲ با بار $q_2=2/00\,\text{pC}$ در فاصلهٔ $d=5/00\,\text{cm}$ از یکدیگر، ثابت شده‌اند. میدان الکتریکی خالص در نقطه‌های (الف) A، (ب) B، و (پ) C برحسب نمادگذاری بردار یکه چگونه است؟ (ت) خطهای میدان الکتریکی را رسم کنید؟



شکل ۱۸-۶۴ مسئلهٔ ۸۷

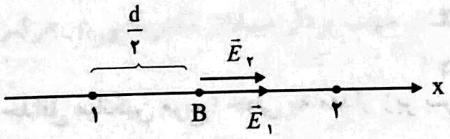
حل: (الف)



$$E_A = -E_1 + E_2 = -\frac{kq_1}{d^2} + \frac{kq_2}{(2d)^2} = \frac{-kq}{d^2} + \frac{k(2q)}{4d^2}$$

$$E_A = -\frac{kq}{2d^2} = -\frac{(9\times10^9)(1\times10^{-12})}{2(0/05)^2} \Rightarrow \vec{E}_A = -1/8\hat{i}\ \text{N/C}$$

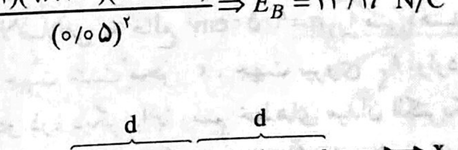
(ب)



$$E_B = E_1 + E_2 = \frac{kq}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} + \frac{k(2q)}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{3kq}{\frac{d^2}{4}} = \frac{12kq}{d^2} \Rightarrow$$

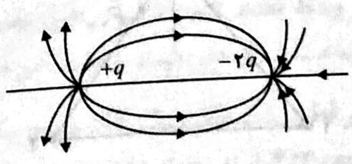
$$E_B = \frac{(12)(9\times10^9)(1\times10^{-12})}{(0/05)^2} \Rightarrow \vec{E}_B = 43/2\hat{i}\ \text{N/C}$$

(پ)



$$E_C = E_1 - E_2 = \frac{kq}{(2d)^2} - \frac{k(2q)}{d^2} = \frac{-7}{4}\,\frac{kq}{d^2} \Rightarrow$$

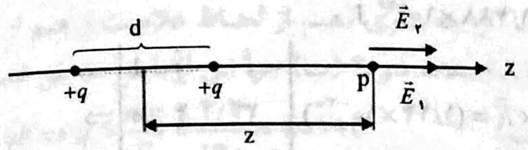
$$E_C = \left(\frac{-7}{4}\right)\left(\frac{(9\times10^9)(1\times10^{-12})}{(0/05)^2}\right) \Rightarrow \vec{E}_C = -6/3\hat{i}\ \text{N/C}$$



۸۸- در شکل ۱۸-۸، هر دو بار را مثبت در نظر بگیرید. با فرض آنکه $z \gg d$ باشد، نشان دهید که در این صورت E در نقطهٔ P در آن شکل با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2q}{z^2}$$

حل:



$$E_p = E_1 + E_2 = \frac{kq}{\left(z+\frac{d}{2}\right)^2} + \frac{kq}{\left(z-\frac{d}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$E_p = kq\left[\frac{z^2+\frac{d^2}{4}-zd+z^2+\frac{d^2}{4}+zd}{\left(z+\frac{d}{2}\right)^2\left(z-\frac{d}{2}\right)^2}\right] \Rightarrow$$

$$E_p = 2kq\left(\frac{z^2+\frac{d^2}{4}}{\left(z^2-\frac{d^2}{4}\right)^2}\right)$$

$$z >> d \Rightarrow E_p = 2kq\frac{z^2}{z^4} \Rightarrow E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2q}{z^2}$$